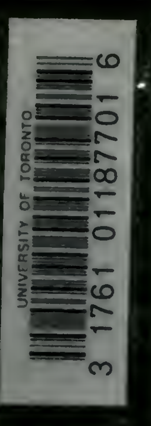
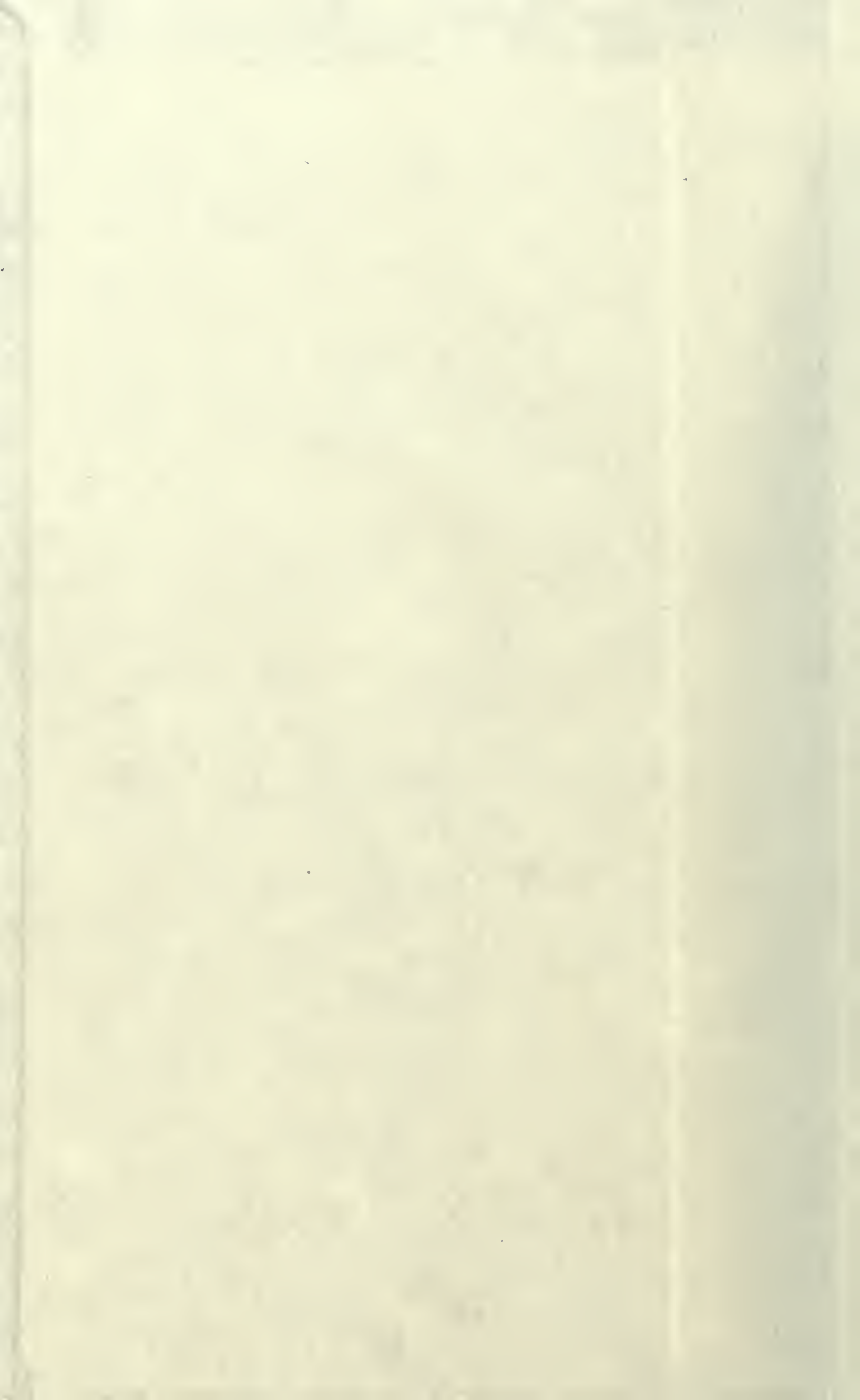
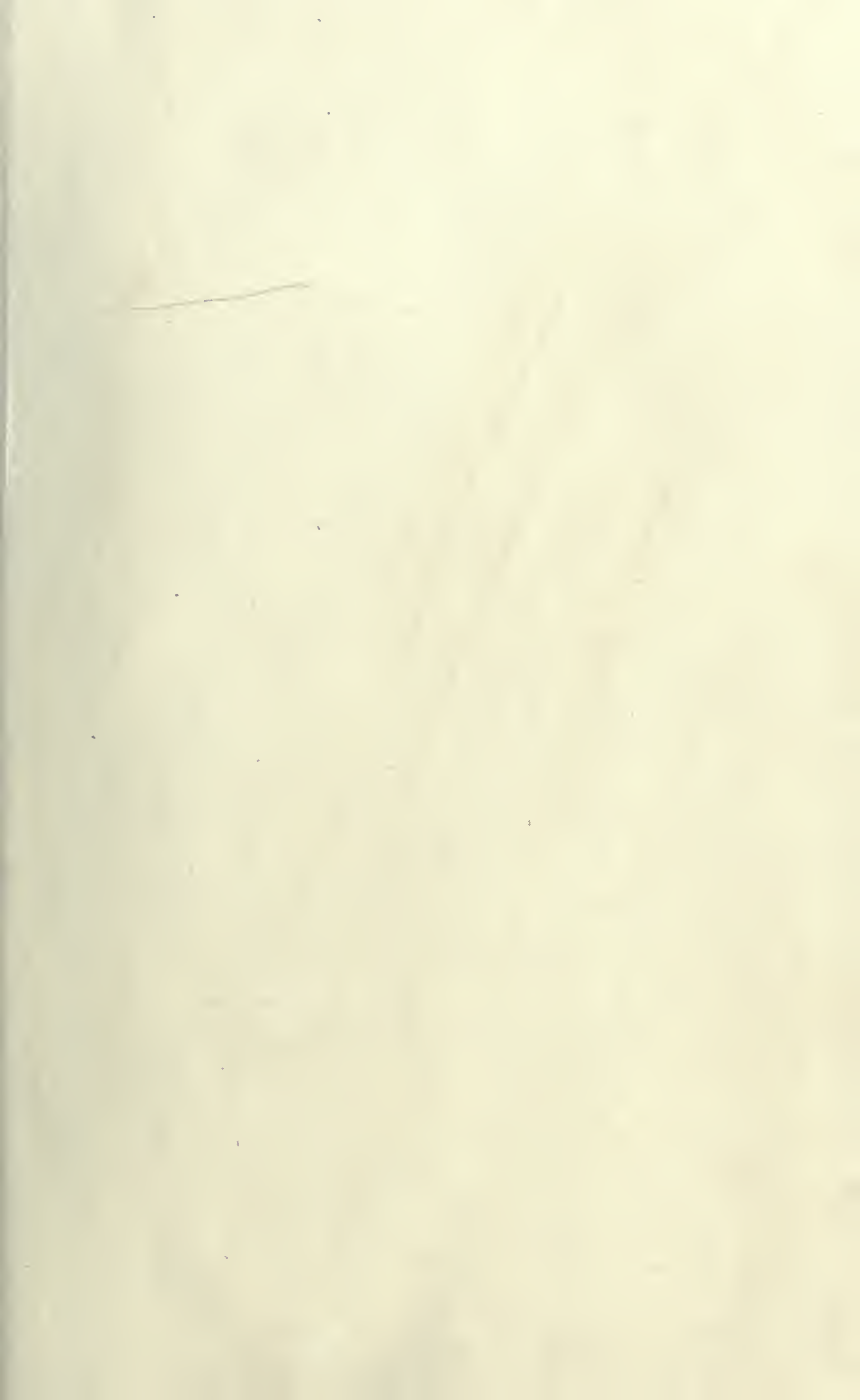


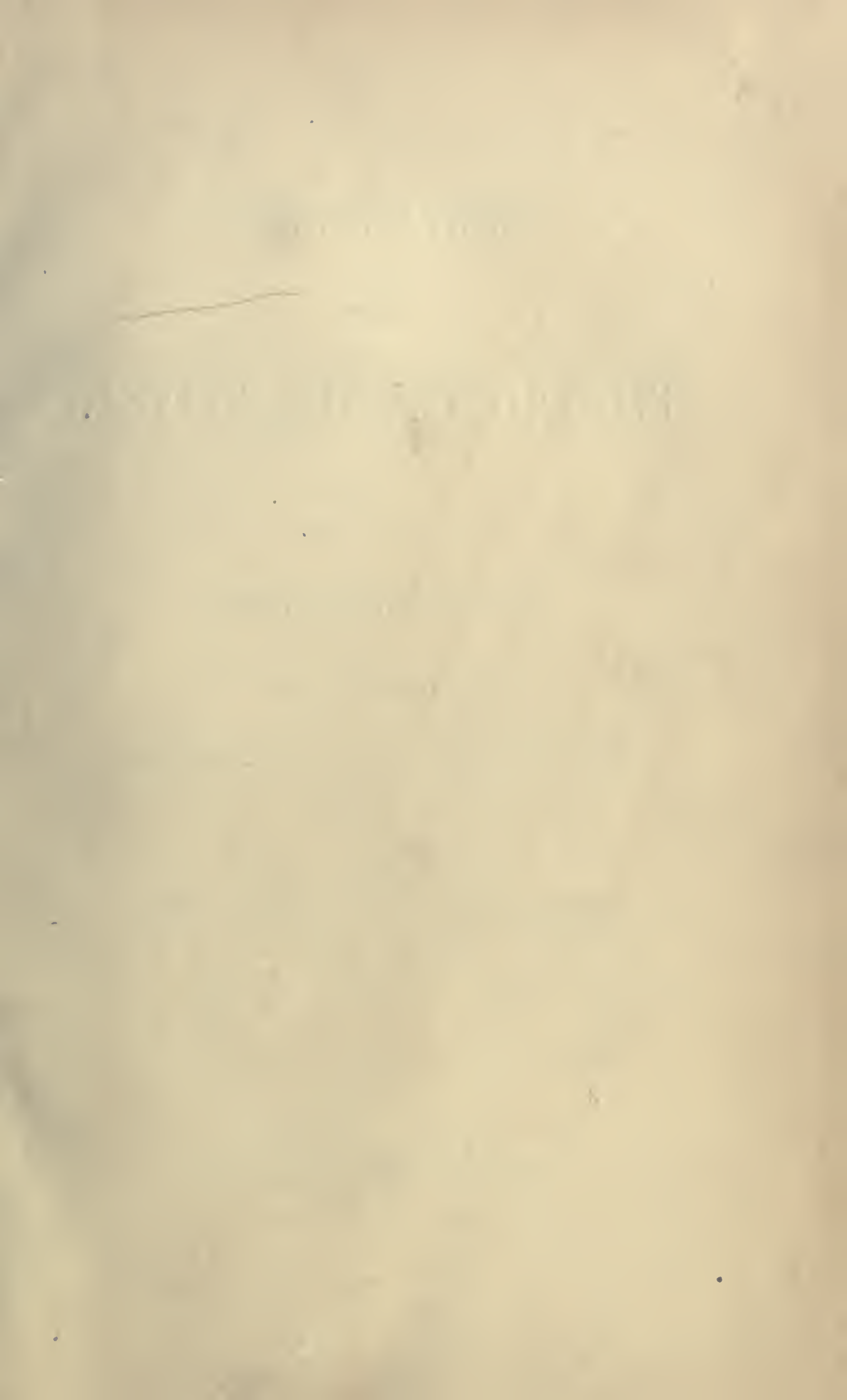












VORLESUNGEN

ÜBER

THEORETISCHE PHYSIK

VON

H. VON HELMHOLTZ.

HERAUSGEGEBEN VON

ARTHUR KÖNIG, OTTO KRIGAR-MENZEL, CARL RUNGE.

BAND V.

ELEKTROMAGNETISCHE THEORIE DES LICHTS.

HERAUSGEGEBEN VON

ARTHUR KÖNIG UND CARL RUNGE.

HAMBURG UND LEIPZIG
VERLAG VON LEOPOLD VOSS
1897.

VORLESUNGEN

ÜBER DIE

ELEKTROMAGNETISCHE THEORIE DES LICHTS

VON

H. VON HELMHOLTZ.

HERAUSGEGEBEN VON

ARTHUR KÖNIG UND CARL RUNGE.

MIT 54 FIGUREN IM TEXT.

HAMBURG UND LEIPZIG
VERLAG VON LEOPOLD VOSS.
1897.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorrede.

Mit dem vorliegenden Buche beginnt die Herausgabe der „Vorlesungen über theoretische Physik von Hermann von Helmholtz“, zu der dieser sich im Sommer 1892 in Folge einer Anregung aus seinem Schülerkreise entschloss. Obschon dieser Band in der systematischen Folge den fünften des auf sechs Bände berechneten Werkes bildet, erscheint er doch zuerst, da sein Inhalt dem ersten für diese Herausgabe in wortgetreuen Stenogrammen von Herrn Dr. Bruno Borchardt vollständig nachgeschriebenen Semestercursus (Winter 1892/93) entspricht. Die Bearbeitung dieser Stenogramme wurde durch manche sich zwischendrängende Arbeiten sehr verzögert, doch hat Helmholtz noch selbst vor seiner Erkrankung (Juli 1894) einen grofsen Theil (§§ 1—52) durchgesehen, ohne ihn aber völlig druckfertig zu gestalten.

Den unterzeichneten Herausgebern lag aufser jenen Stenogrammen nur ein kleines Büchlein vor, in welches Helmholtz kurze vorbereitende Notizen zu seinen Vorlesungen eingetragen hat. Alle genaueren Ausführungen waren bei ihm Improvisation. So grofsen Reiz und Werth seine Vorlesungen dadurch auch für den reiferen Zuhörer erhielten — sah dieser doch gewissermafsen die Helmholtz'schen Gedankengänge im Zustande ihres Entstehens und Werdens — so war damit andererseits der Nachtheil verknüpft, dafs manche begonnene Entwickelung nicht durchgeführt wurde oder auch wohl nicht durchgeführt werden konnte. Hierdurch war für die zum Druck bestimmte Ausarbeitung, an welche natürlich andere Anforderungen gestellt werden als an eine frei gehaltene Vorlesung, ein ziemlicher Spielraum hinsichtlich der Aufnahme der einzelnen Ausführungen gegeben. Am meisten gilt dieses von dem letzten Theile, mit dessen Gegenstand Helmholtz gerade zur Zeit dieser Vorlesung, wie aus gleichzeitigen Abhandlungen von ihm hervorgeht, besonders beschäftigt war und der daher in dem Steno-

gramme manche nur begonnene, aber bald wieder fallen gelassene Ansätze enthielt.

Es würde zu weit führen, alle diese erforderlichen Auslassungen, Umänderungen und Ergänzungen anzugeben. Nur zwei Punkte verdienen vielleicht besonders hervorgehoben zu werden.

Helmholtz hat im Laufe der Vorlesung mit dem Coordinatensystem gewechselt. Anfangs hatte er die Anordnung der Coordinatenaxen übereinstimmend mit Maxwell angenommen, bei der von der positiven Seite der z-Axe aus die positive x-Axe rechts von der positiven y-Axe erscheint. Später ging er zu der entgegengesetzten Anordnung der Coordinatenaxen über. Die Herausgeber haben die erste Anordnung festgehalten, die Helmholtz in der Ausarbeitung noch gesehen hat, obgleich er in den gedruckten Abhandlungen über Elektrodynamik die zweite Anordnung gewählt hat, der auch Hertz gefolgt ist.

Ebenso haben sich die Herausgeber für die anfängliche Bezeichnung der elektrischen und magnetischen Constanten entschieden. Gegen Ende der Vorlesung ist Helmholtz zu der Bezeichnung seiner Abhandlungen übergegangen, wo die elektrische und magnetische Constante für den freien Aether nicht gleich 1, sondern gleich 4π gesetzt sind. Durch diese Entscheidung waren die Herausgeber nun aber gezwungen, in der Dispersionstheorie auch bei der Constante ϑ auf S. 332 den Factor 4π einzuführen, abweichend von der Bezeichnung in Helmholtz' „Wissenschaftlichen Abhandlungen“ Bd. III S. 509. Wenn dies geschieht, werden die Gleichungen der Dispersion wieder identisch mit den Gleichungen der gedruckten Abhandlung.

Aufserdem ist zu erwähnen, dafs die „geometrische Optik“ nicht in derjenigen Ausführlichkeit wirklich vorgetragen wurde, mit der sie hier dargestellt ist. Auf ausdrückliche Anordnung von Helmholtz sind einige Abschnitte aus seinen anderweitigen Veröffentlichungen in geeigneter Anpassung eingefügt worden.

Berlin und Hannover, Weihnachten 1896.

Arthur König.
Carl Runge.

Inhalt.

Einleitung.

Erster Theil.

Elastische Schwingungen in continuirlich verbreiteten Medien.

Zweiter Theil.

Elektromagnetische Schwingungen.

Erster Abschnitt.

Die Maxwell'schen Gleichungen.

Zweiter Abschnitt.

Hülfssätze aus der Lehre von den Potentialfunctionen.

Dritter Abschnitt.

Umformung der Maxwell'schen Gleichungen in die Form der Wellengleichung.

Dritter Theil.

Kugelförmige Wellen.

Erster Abschnitt.

Integrale der Wellengleichung.

Zweiter Abschnitt.

Beziehungen zwischen den elektrischen und magnetischen kugelförmigen Wellen.

Dritter Abschnitt.

Das Huyghens'sche Princip.

Vierter Theil.

Die Beugung des Lichtes.

Erster Abschnitt.

Allgemeines.

Zweiter Abschnitt.

Beugung an einer einzelnen Oeffnung.

Dritter Abschnitt.

Die Beugung an einem Gitter.

Vierter Abschnitt.

Die Beugungserscheinungen als Folge interferirender Wellensysteme anschaulich abgeleitet.

Fünfter Abschnitt.

Durchgang der Lichtbewegung durch eine Oeffnung von beliebiger Form unter der Annahme unendlich kleiner Wellenlänge.

Seite

Fünfter Theil.

Geometrische Optik.

Erster Abschnitt.

Die Spiegelung.

Zweiter Abschnitt.

Die Brechung.

Dritter Abschnitt.

Die Brechung in Systemen centrirter Flächen.

Vierter Abschnitt.

Die Helligkeit der optischen Bilder.

Sechster Theil.

Die Polarisation und Dispersion des Lichtes.

Erster Abschnitt.

Die Polarisation des Lichtes bei der Spiegelung und Brechung.

Zweiter Abschnitt.

Die Dispersion des Lichtes.

Dritter Abschnitt.

Die Spiegelung und Brechung bei absorbirenden Medien.

Vierter Abschnitt.

Die Lichtbewegung in krystallinischen Medien.

Fünfter Abschnitt.

Die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde.

EINLEITUNG.

§ 1. Historisches. Die Emissionstheorie und die Undulationstheorie des Lichtes.

Die Vorstellungen von der Natur des Lichtes und die daran anknüpfenden mathematischen Erörterungen haben sich im Laufe der Zeit mehrfach verändert. So lange man noch nichts von der Unzerstörbarkeit der Energie wufste, wurde jedes Agens, welches ein gewisses Vermögen zeigte, sich fortzubewegen und unter wechselnden Bedingungen fortzubestehen, als eine Substanz betrachtet. Die geradlinige Bewegung des Lichtes unterstützte diese Auffassung; denn das Licht konnte in seinem Wege zwar aufgehalten werden, ging aber, wenn kein Hindernifs entgegenstand, stets in gerader Linie weiter. Es lag nahe, dieses Verhalten als Folge der Trägheit eines materiellen Körpers aufzufassen. Wir finden daher in der älteren Physik bis zu Newton hin fast ausschliefslich die Anschauung vertreten, dafs das Licht etwas Körperliches sei, dafs es aus kleinen materiellen Theilchen bestände, die mit sehr grofser Geschwindigkeit von den leuchtenden Körpern ausgestofsen werden und in gerader Linie durch den Raum hinfliegen. — Emissionstheorie. — Newton selbst entwickelte seine optischen Ansichten aus dieser Vorstellung heraus. Man mufste dann zur Erklärung der Brechung annehmen, dafs die stärker brechenden Körper eine gröfsere Anziehungskraft auf die Lichtkörperchen ausüben, so dafs in dem Moment, wo ein solches Körperchen in schräger Richtung an der Oberfläche eines dichteren Mediums anlangt, es eine Anziehung erleidet, welche der senkrechten Componente seiner Geschwindigkeit einen gröfseren Werth giebt, und dadurch die Richtung seiner Bahn der Senkrechten nähert. Das Umgekehrte geschieht beim Austritt aus einem optisch dichteren in ein optisch dünneres Medium. Es müfste also die Geschwindigkeit des Lichtes in optisch dichteren Körpern gröfser sein, als in optisch dünneren, wenn die Gesetze der Brechung auf Grund der Emissionstheorie sich erklären lassen sollten. Schwieriger wurde es,

als Newton bei der Untersuchung über die Farben dünner Blättchen Interferenzphänomene kennen lernte. Hier zeigte sich nämlich, dafs bei durchsichtigen Blättchen, z. B. Seifenblasen von gewisser Dicke, ein Lichtstrahl leicht hineintrat und auch wieder herausging, dafs aber an der zweiten Fläche, je nach ihrem Abstande von der ersten Fläche, bald ein gröfserer, bald ein kleinerer Theil desselben reflectirt wurde. Newton kam dadurch zu der Vorstellung, dafs die Lichtkörperchen von vierkantiger Gestalt wären und schnell rotirten, wodurch sie bald eine Kante, bald eine Fläche dem Körper zukehrten, dem sie auf ihrer Bahn begegneten. In der einen Lage sollten sie dann leichter zurückgeworfen werden, und in der anderen Lage leichter eindringen. Zur Erklärung der damals noch wenig bekannten Polarisationserscheinungen mufste er ferner eine Verschiedenheit der Lichtstrahlen nach den verschiedenen Seitenrichtungen annehmen, die er sich mit der eben besprochenen Rotation der Lichtkörperchen in Zusammenhang dachte. Auf diese Weise entstand eine verhältnifsmäfsig sehr künstliche Vorstellung über die Art der Bewegung, welche die Lichtkörperchen besitzen müfsten.

Ziemlich gleichzeitig mit Newton hatte Huyghens seine optischen Untersuchungen begonnen und eine andere Theorie über die Natur des Lichtes aufgestellt, welche diesem ähnliche Eigenschaften wie dem Schalle beilegte. — Undulationstheorie. — Ebenso, wie von der Fortpflanzung des Lichtes, kann man auch von der Fortpflanzung des Schalles sprechen, wenn letzterer sich auch nicht so ausschliefslich in gerader Richtung, wie es meistentheils bei dem Lichtstrahle der Fall ist, vorwärts bewegt, sondern eine gröfsere Neigung zur seitlichen Ausbreitung hat. Die Fortleitung des Schalles geschieht unter ähnlichen Bedingungen und Verhältnissen, wie die Bewegung des Lichtes, so dafs eine Vergleichung sehr nahe lag, und gerade die durch Newton aufgefundenen Interferenzerscheinungen wiesen darauf hin.

Während Newton für die verschiedenfarbigen Lichter verschiedene Arten von Körpern oder Lichtkörper verschiedener Gröfse und verschiedener Rotationsgeschwindigkeit annehmen mufste, war hier nur die Voraussetzung verschiedener Wellenlängen erforderlich. Es liefs sich also mittels der Undulationstheorie eine Reihe von Erscheinungen viel besser und besonders unter viel einfacheren Voraussetzungen erklären, als es bei der Newton'schen Emissionstheorie der Fall war. Doch boten die Polarisationserscheinungen noch immer unüberwindliche Schwierigkeiten, so lange man die Analogie zwischen Licht und Schall auch mit Bezug auf die Longitudinalschwingungen festhielt.

Ein Lichtstrahl zeigt, wie bemerkt, Verschiedenheiten nach den verschiedenen Seitenrichtungen, was bei Longitudinalwellen nicht möglich ist. Erst als man fand, dafs die Polarisationserscheinungen in allen ihren Einzelheiten durch die Annahme transversaler Schwingungen, d. h. solcher, die senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Strahlen sind, erklärt werden konnten, blieb kaum noch ein Zweifel über die Vorzüge der Undulationstheorie im Vergleiche zu der Emissionstheorie bestehen. Seit dieser Zeit haben sich die Physiker ausschliefslich der Undulationstheorie zugewandt, und von der Emissionstheorie ist schon lange kaum noch die Rede.

§ 2. Schwierigkeiten bei der strengen Durchführung der Undulationstheorie.

Transversale Schwingungen können nun nicht in Flüssigkeiten vorkommen, sondern nur in festen Körpern, und deshalb mufste man dem schwingenden Medium, für das man die Bezeichnung Aether einführte, solche mechanischen Eigenschaften zuschreiben, welche denen der starren, fest-elastischen Körper ähnlich waren. Transversale Schwingungen sind in Flüssigkeiten unmöglich; denn diese widerstehen nur der Compression, beziehlich der Dilatation der Volumina, und wenn sie comprimirt oder dilatirt sind, wirken die gleichen Kräfte nach allen Richtungen. Es können sich daher in ihnen nur Longitudinalschwingungen fortpflanzen, während bei den fest-elastischen Körpern auch ein Widerstand gegen relative Verschiebung paralleler Schichten stattfindet. In einem Flüssigkeitscylinder widersteht die Flüssigkeit durchaus nicht einer Bewegung, durch welche ihre Querschnitte gegen einander gedreht werden; aber bei einem Glas- oder Stahlcylinder können wir eine solche Drehung eines Endes des Cylinders gegen das andere und damit eine Drehung der verschiedenen kreisförmigen Querschnitte gegen einander nicht hervorbringen, ohne dafs wir eine elastische Gegenkraft, die Torsionskraft, entstehen sehen. Wenn kein Widerstand gegen eine bestimmte Art der Bewegung vorhanden ist, so kann es auch nicht zu solchen Oscillationen kommen, welche in Bewegungen bestehen, die durch den Widerstand dieser Kräfte aufgehoben und umgekehrt werden. Die Undulationstheorie mufs also dem Aether solche Eigenschaften zuschreiben, wie sie von den bekannten irdischen Körpern nur die fest-elastischen Körper besitzen. Für die Vorstellung ist es nun sehr schwierig, dafs zufolge dieser Anschauung die Planeten und die

übrigen im Weltraum sich bewegenden Körper mit grofser Schnelligkeit durch die starre Substanz des Aethers hindurch eilen. Es ist aber noch immerhin möglich, so lange man voraussetzt, dafs der Aether dauernd in Ruhe ist; aber die FRESNEL'sche Ausführung der Undulationstheorie führte zu der Vorstellung, dafs immer ein Theil des Aethers sich an der Bewegung der festen Körper betheiligt, während ein anderer Theil in Ruhe bleibt. Dieses war für jede klare Vorstellung eine unüberwindliche Schwierigkeit. Dazu kamen dann noch gewisse Schwierigkeiten in der Ausführung einzelner specieller Punkte der Theorie; so mufste man z. B. annehmen, dafs der Aether incompressibel sei, denn sonst hätte er auch Längsschwingungen zeigen müssen. Nach der Analogie mit fest elastischen Körpern liefs sich wohl einsehen, dafs Schwingungen, die in einem elastischen Körper sich fortpflanzen, an einer Grenzfläche zum Theil in den zweiten Körper eintreten, zum Theil reflectirt werden, und es liefs sich auch durch die Annahme verschiedener Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der Wellen in den verschiedenen Medien eine Erklärung der Gesetze der Brechung geben. Dabei stellte sich dann als Unterschied zwischen den beiden erwähnten Theorien heraus, dafs die Undulationstheorie zur Erklärung der Brechung nothwendig annehmen mufste, dafs in dichteren Körpern die Lichtgeschwindigkeit geringer sei als in den dünneren, und zwar dafs sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit in zwei verschiedenen Medien immer umgekehrt verhält wie das Brechungsverhältnifs, während die Emmissionstheorie, wie schon in § 1 ausgeführt ist, die entgegengesetzte Annahme machen mufste.

Bei der Ableitung der Intensität des gebrochenen und des reflectirten Strahles auf Grund der Undulationstheorie kam man nun aber auch hier auf erhebliche Schwierigkeiten, die trotz der grofsen Zahl von Abhandlungen, die darüber geschrieben worden sind, bisher noch nicht überwunden wurden. Lord RAYLEIGH zeigte zwar, dafs man unter der Voraussetzung völliger Incompressibilität des Aethers Werthe für jene Intensitäten ableiten kann, welche einen Polarisationswinkel ergeben, der mit dem experimentell gefundenen unter Rücksicht auf die Breite der Beobachtungsunsicherheit erträglich übereinstimmt. GUSTAV KIRCHHOFF half sich in einer anderen Weise, indem er eine Bedingung über die Gleichheit der Kräfte auf beiden Seiten der Grenze aufstellte, wobei er den Umstand in die Betrachtung einführte, dafs bei dem Durchgang durch die Grenze zweier durchsichtiger Medien von der lebendigen Kraft der Transversalwellen nichts verloren geht, die gebrochene und die reflectirte Trans-

versalwelle zusammen genommen also wieder die lebendige Kraft der einfallenden Welle haben. Streng genommen müfste man hier sagen: „zu haben scheinen"; denn sorgfältig messende Versuche sind darüber noch nicht gemacht worden. KIRCHHOFF setzte eine nicht näher definirte Art von Molekularvorgängen in den Grenzschichten voraus, welche möglich machen sollte, dafs diese Bedingung für die lebendige Kraft erfüllt werde.

Auf die hier vorliegenden Schwierigkeiten wird weiter unten noch näher eingegangen werden.

§ 3. Die verschiedenen elektrischen Einheiten.

Nun haben wir in neuerer Zeit in einem ganz anderen Gebiete, nämlich demjenigen der Elektricität und des Magnetismus, eine Reihe von Erfahrungen gewonnen, durch welche die Existenz von Oscillationen, und zwar zu ihrer Fortpflanzungsrichtung transversalen Oscillationen in dem Aether nachgewiesen wird, die sich mit ähnlich grofser Geschwindigkeit durch den Raum fortpflanzen, wie die Licht-Oscillationen, und bei welchen die ponderablen Massen, die in dem oscillirenden Aether liegen, wenigstens erst secundär in Betracht kommen, so dafs also die wesentliche Quelle der Bewegung durch die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des Mediums, in dem die Bewegung vor sich geht, gegeben ist. Der erste Anstofs zu diesen Entdeckungen lag in den Messungen, welche WILHELM WEBER über das quantitative Verhältnifs der elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten der Elektricität ausgeführt hat.

Zuerst lernte man die Wirkung ruhender elektrischer Quanta aufeinander durch den Raum hin kennen, und zwar war es COULOMB, der das betreffende Gesetz aufstellte, das sich dann späterhin bei genaueren Messungen als streng richtig erwies. Die abstofsende Kraft zwischen zwei gleich grofsen elektrischen Quanta, die beide mit e bezeichnet seien, ist nach diesem Gesetze der Gröfse $\frac{e \cdot e}{r^2}$ proportional, so dafs wir die Kraft k schreiben können:

$$k = a \cdot \frac{e \cdot e}{r^2} \tag{1}$$

Wie grofs die Constante a wird, hängt natürlich von dem Maafse ab, welches man als Einheit für die Gröfse der beiden elektrischen Quanta wählt. Eine solche Einheit leitet man am besten aus den Erscheinungen selbst her, indem man die Einheit so bestimmt, dafs der in Gleichung (1) vorkommende Coefficient a gleich 1 wird.

Dann würde also, wenn das elektrische Quantum 1 auf ein Quantum gleicher Gröfse in der Einheit der Entfernung wirkt, eine Kraft entstehen, welche, nach dynamischem Maafse gemessen, durch die Zahl 1 ausgedrückt werden müfste.

Wir haben also.

$$\left.\begin{aligned}\frac{e\,.\,e}{r^2} &= \text{Kraft}\\ \text{oder}\qquad \frac{e^2}{r^2} &= \text{Kraft},\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

woraus folgt, dafs wir den physikalischen Dimensionen nach

$$\frac{e}{r} = \sqrt{\text{Kraft}} \qquad (2\text{a})$$

oder

$$e = r\,.\sqrt{\text{Kraft}} \qquad (2\text{b})$$

zu setzen haben.

Man kann auf solche Weise aus der Messung der Abstofsung zweier gleichen Quanta direkt eine Maafsbestimmung herleiten, welche als absolute Messung der betreffenden elektrischen Quanta, und zwar in elektrostatischem Maafs, zu bezeichnen wäre. Diese Methode absoluter Messung ist zuerst von Gauss und zwar für die magnetischen Kräfte vorgeschlagen worden, auf welche sich genau dieselbe Betrachtung anwenden läfst. Es tritt bei diesen freilich eine Complication dadurch ein, dafs wir es niemals nur mit zwei isolirten Magnetpolen zu thun haben, sondern dafs sich immer in geringerer oder gröfserer Entfernung auch andere Pole befinden. Dennoch liefsen sich diese Messungen hinreichend scharf ausführen, um mit ausreichender Genauigkeit die Kraft k zu finden, welche zwei gleiche Quanta von Magnetismus, die mit m bezeichnet werden mögen, auf einander ausüben, und welche man bei passender Wahl der Einheiten für die magnetischen Quanta auch wieder schreiben kann:

$$\left.\begin{aligned}k &= \frac{m\,.\,m}{r^2}\\ \text{oder}\qquad k &= \frac{m^2}{r^2}\end{aligned}\right\}\quad (3)$$

Ferner lernte man die elektrodynamischen Wirkungen der elektrischen Ströme auf einander kennen, und nach den Ampère'schen Gesetzen konnten diese in letzter Instanz auf die Abstofsungen und Anziehungen zurückgeführt werden, welche zwei Linienelemente, die man sich isolirt dachte, und in deren jedem ein elektrischer Strom flofs, auf einander ausübten. Bezeichnen wir die Intensitäten dieser

Ströme mit I und J, die Länge der Linienelemente, welche auf einander wirken, mit ds und $d\sigma$, und nehmen wir an, dafs beide Stromelemente parallel zu einander und zwar senkrecht zu ihrer Verbindungslinie, deren Gröfse mit r bezeichnet werde, gerichtet sind (Fig. 1), so ist nach AMPÈRE die zwischen beiden Stromelementen wirkende Kraft

$$k = c \cdot \frac{I \cdot J \cdot ds \cdot d\sigma}{r^2} \tag{4}$$

welche für gleich gerichtete Ströme anziehend ist. Alle verwickelteren Erscheinungen der elektrischen Anziehungen liefsen sich nun theils auf diesen Fall, theils auf den anderen Fall, wo die Stromelemente beide in der Fortsetzung der Verbindungslinie r wirkten (Fig. 2), zurückführen. In dem letzteren Falle schrieb ihnen AMPÈRE eine Wirkung zu, welche die Hälfte jener ersten war, aber für gleichgerichtete Ströme Abstofsung bewirkte:

$$k' = -\frac{c}{2} \cdot \frac{I \cdot J \cdot ds \cdot d\sigma}{r^2}. \tag{5}$$

Fig. 1.

Man kann nun auch hier die Einheit für I und J so wählen, dafs die Constante c gleich 1 wird. Wir erhalten dann also:

$$k = \frac{I \cdot J \cdot ds \cdot d\sigma}{r^2} \tag{4a}$$

und

$$k' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{I \cdot J \cdot ds \cdot d\sigma}{r^2}. \tag{5a}$$

Diese Art der Messung für die Intensitäten elektrischer Ströme hat WILHELM WEBER zuerst angewendet und die damit gewonnene Einheit die elektrodynamische Stromeinheit genannt. Thatsächlich kann man nun aber nicht zwei kurze Stromelemente herstellen, wenigstens nicht in ihrer Wirkung gegen einander beobachten, sondern man hat es immer mit längeren, meist geschlossenen Strömen zu thun. Bei der Wirkung eines geschlossenen Stromes auf einen anderen geschlossenen Strom tritt nun eine Willkürlichkeit ein, sobald man aus der ganzen beobachteten Wirkung auf die Wirkung der Theile schliefsen will. Die Wirkung des einen geschlossenen Stromes ist eine Summe, welche noch einmal summirt wird, indem man die Wirkung auf alle Stromelemente des anderen nimmt. Beim Schlufs von der Gesammtwirkung auf die Wirkung der Theile ist also zweimal eine beobachtete Summe in ihre Summanden zu zerlegen. Man

Fig. 2.

kann nun wohl mit Sicherheit und Eindeutigkeit eine Summe aus den Summanden, aber nicht die Summanden aus der Summe finden.

Ampère ging von der Vorstellung aus, dafs diese Einwirkung der verschiedenen Stromelemente auf einander entweder anziehend oder abstofsend sein müfste. Das ist eine Voraussetzung, welche bei zwei materiellen Punkten, durch deren Lage nur eine geometrische Gröfse, die Verbindungslinie, vollständig bestimmt ist, zulässig erscheint, nicht aber, wenn wir es mit zwei Linienelementen zu thun haben, da dann noch deren Richtungen hinzukommen, über welche wir Hülfshypothesen aufstellen müssen. Wir dürfen daher die Ampère'sche Formel nicht als eine nothwendige Formulirung betrachten; sie gilt eben nur unter Zugrundelegung der Ampère'schen Hülfshypothese.

Es mag noch kurz darauf hingewiesen werden, dafs Wilhelm Weber auch die Einwirkung des Stromes auf den Magnetpol untersuchte und dabei das Gauss'sche Maafs des Magnetismus zu Grunde legte. Indem er auch hier die Einheit für den Strom in analoger Weise wählte, kam er zu der elektromagnetischen Einheit, welche sich von der elektrodynamischen nicht in der Dimension, sondern nur durch den Factor $\sqrt{2}$ unterschied. Die späteren Erörterungen haben sich meistens an die elektromagnetische Einheit angeschlossen.

In dem Ausdruck

$$k = \frac{I \,.\, J \,.\, ds \,.\, d\sigma}{r^2}$$

kann das Product der beiden Längen, $ds \,.\, d\sigma$, gegen das Quadrat einer Länge, r^2, gehoben werden, so dafs also der Dimension nach das Product der Intensitäten zweier elektrischen Ströme gleich einer Kraft ist. Die Intensität eines Stromes ist demnach, in elektrodynamischem und in elektromagnetischem Maafs dargestellt, die Wurzel aus einer Kraft; also ist

$$I = \sqrt{\text{Kraft}}. \tag{6}$$

Wir können uns aber auch ein Maafs für die Intensität eines galvanischen oder elektrischen Stromes bilden, indem wir davon ausgehen, dafs in gleichmäfsigen Strömen eine bestimmte Anzahl elektrostatischer Einheiten in der Secunde durch jeden Querschnitt des Leiters hindurchläuft. Wir wollen nun diese Anzahl mit i, die Intensität desselben Stromes in elektromagnetischem Maafse gemessen mit I, und mit A einen solchen Factor bezeichnen, dafs

$$I = A \,.\, i \tag{7}$$

ist. Die Intensität i können wir nun aber auch ausdrücken durch die in der beliebigen Zeit t durch den Querschnitt strömende, in elektrostatischen Einheiten gemessene Elektricitätsmenge e, so dafs wir haben:

$$i = \frac{e}{t}. \tag{8}$$

Nach Gleichung (2b) ist aber $e = r \cdot \sqrt{\text{Kraft}}$, so dafs also

$$\left.\begin{aligned} I &= A \cdot i = A \cdot \frac{e}{t} \\ &= A \cdot \frac{r \cdot \sqrt{\text{Kraft}}}{t}. \end{aligned}\right\} \tag{7a}$$

Da nun aber nach Gleichung (6) $I = \sqrt{\text{Kraft}}$, so geht daraus hervor, dafs $A \cdot \frac{r}{t}$ eine reine Zahl ist. Es hat also A die physikalische Dimension des reciproken Werthes einer Geschwindigkeit. In diesem Sinne ist demnach:

$$A = \frac{t}{r}. \tag{9}$$

Man pflegt in der neueren physikalischen Literatur Gleichungen, welche sich nur auf die Art der ihnen zu Grunde liegenden Einheiten beziehen, als solche dadurch zu kennzeichnen, dafs man beide Seiten mit eckigen Klammern einfafst, so dafs wir hier schreiben können:

$$[A] = \left[\frac{t}{r}\right]. \tag{9a}$$

In einer solchen Gleichung bezieht sich die Gleichheit also nicht auf die Gröfse der betreffenden Quanta, sondern nur auf die Art der Einheiten, die für die Quanta gebraucht sind.

Es geht aus Gleichung (9a) also hervor, dafs das Verhältnifs zwischen den beiden Arten der Einheiten für den elektrischen Strom — der elektrostatischen und elektromagnetischen Einheit —, welches hier mit A bezeichnet wurde, der reciproke Werth einer Geschwindigkeit ist. Diese Geschwindigkeit, also der reciproke Werth von A, ergab sich bereits bei den Versuchen von Wilhelm Weber sehr nahehin gleich der schon bekannten Geschwindigkeit des Lichtes. Die Uebereinstimmung war so genau, dafs es als einer der sonderbarsten Zufälle hätte betrachtet werden müssen, wenn die beiden Zahlen, die auf vollkommen verschiedenen Wegen gefunden waren, keinen inneren Zusammenhang gehabt hätten.

Das war die erste Andeutung von Beziehungen zwischen der Lichtbewegung und den elektromagnetischen Vorgängen. Sie wurde ergänzt durch die zum grofsen Theil schon vorher von Faraday ausgesprochenen und dann von Maxwell in mathematischer Formulirung durchgeführten Theorien, auf welche wir nunmehr eingehen wollen.

§ 4. Fernkräfte. — Dielektrische und magnetische Polarisation.

Faraday gehört zu derjenigen Klasse von Physikern, welche an die Existenz von Fernkräften, d. h. von solchen Kräften, die durch den Raum wirken, ohne zugleich in diesem eine Wirkung hervorzubringen, nicht glauben wollen. Die Annahme solcher Kräfte ist stets für den menschlichen Geist eine widerstrebende Vorstellung gewesen. Als Newton das allgemeine Gravitationsgesetz aufstellte und nachwies, dafs die Planetenbewegungen aus der Annahme desselben vollständig erklärt werden könnten, hat er es keineswegs als seine Ueberzeugung ausgesprochen, dafs er nun dadurch die Existenz einer solchen Kraft, wie es die Gravitationskraft war, als erwiesen betrachtete; er sagte vielmehr, die Himmelskörper bewegen sich so, als wenn zwischen ihnen eine solche Anziehung bestände, wie sie durch das Gesetz gefordert wurde. Er betrachtete die Gravitationskraft also nur als ein Mittel zu anschaulicher Darstellung der factisch eintretenden Wirkungen. Unter dem Einflusse dieser grofsen Entdeckung und der ungeheuer weiten Consequenzen, welche sich aus derselben ableiten liefsen und die vollste Uebereinstimmung mit der Erfahrung zeigten, kamen die Astronomen bald dahin, dafs sie die Schwierigkeiten einer solchen Annahme nur als ideelle oder metaphysische betrachteten, auf die man bei der Erklärung der Naturerscheinungen nicht weiter Rücksicht zu nehmen brauchte, und es ist sogar während des ganzen vorigen Jahrhunderts diese Newton'sche Gravitationskraft für fast alle Versuche, physikalische Theorien der mannigfaltigsten Naturerscheinungen aufzustellen, das Muster gewesen. Man stellte sich die Molekularkräfte als abstofsende und anziehende Kräfte im Sinne der Newton'schen Gravitationskraft vor, wenn man ihnen auch eine etwas andere Abhängigkeit von der Entfernung zuschrieb, und ebenfalls wurden die elektrostatischen und magnetischen Kräfte in einfachster Art auf dasselbe Fundamentalbild zurückgeführt. Faraday war nun, wie schon gesagt, einer von denen, welche sich mit der Annahme solcher Fernkräfte nicht befreunden konnten, und suchte daher bei den

neuentdeckten und von ihm vielfach untersuchten magnetischen, elektromagnetischen und elektrischen Erscheinungen immer nach Veränderungen in den zwischenliegenden Körpern. Das führte ihn erstens auf die Frage, ob für die elektrostatischen Anziehungen und Abstofsungen die Anwesenheit eines zwischenliegenden Isolators gleichgültig sei, wobei er denn sogleich fand, dafs in der That die Anziehungskraft sehr wesentlich verändert wird, wenn ein anderer Isolator als Luft zwischen den elektrisirten Körpern liegt. Er schlofs daraus, dafs in Isolatoren, welche starken elektrischen Kräften von beiden Seiten her ausgesetzt werden, eine Veränderung vor sich geht, und dafs diese Veränderung zu der Aenderung der beobachteten Wirkung beitrage. Wenn wir einen Condensator auf ein bestimmtes Potential laden, so sind dazu Elektricitätsmengen erforderlich, welche nach der älteren Coulomb'schen Theorie aus der Flächenausdehnung und dem Abstand der Condensatorplatten berechnet werden können; für ein anderes isolirendes Medium als Luft stimmt aber die Rechnung nicht mehr. Wenn man Scheiben von Paraffin oder gut isolirendem Glas oder Harz zwischen die Platten eines schon geladenen Condensators bringt, die auf einem bestimmten Potentialunterschied gehalten werden, so findet man, dafs nun sehr viel mehr Elektricität von dem Condensator aufgenommen wird als vorher. Solche Versuche zeigten Faraday den Einflufs der zwischenliegenden Substanzen auf die elektrischen Ladungserscheinungen und die Kräfte, mit denen die Elektricitäten sich anziehen, und gaben ihm Veranlassung, die Lehre von der dielektrischen Polarisation der isolirenden Medien auszubilden. Die Thatsache, dafs für die elektrischen Fernwirkungen die zwischenliegenden isolirenden Körper nicht gleichgültig sind, führte ihn dann weiter zu Untersuchungen der magnetischen Erscheinungen an schwach magnetischen Körpern, und er fand dabei, dafs aufser den Körpern, welche ebenso wie das Eisen, nur sehr viel schwächer, unter der Einwirkung magnetischer Kräfte magnetisirt werden, es auch andere Körper giebt, welche sich entgegengesetzt verhalten; letztere Erscheinungen werden am leichtesten und einfachsten erklärt, wenn man annimmt, dafs solche Körper weniger magnetisirbar sind als das Medium, welches sie verdrängt haben. Da nun die Versuche auch im Vacuum gelingen, so mufste daraus geschlossen werden, dafs auch das Vacuum sich solchen diamagnetischen Körpern gegenüber wie ein magnetisirbarer Körper verhalte. Er fand ferner, dafs durchsichtige Körper, welche stark magnetisirt sind, in anderer Weise das Licht fortpflanzen, als dieselben Körper in unmagnetisirtem Zustande. Es waren dies alles

zunächst nur Thatsachen, welche nachwiesen, dafs starken elektrischen und magnetischen Kräften ausgesetzte ponderable Massen vielfache Veränderungen erleiden, und es konnte kaum zweifelhaft erscheinen, dafs diese Veränderungen auch auf die elektrischen Vorgänge selbst zurückwirken müssen. Nun hatte die Beobachtung des temporären Magnetismus in weichem Eisen unter den Einwirkungen irgend welcher magnetisirenden Kräfte längst zu der Molekularhypothese des Magnetismus geführt, nach welcher unter Einwirkung äufserer magnetischer Kräfte in den Molekeln selbst sich magnetische Pole ausbilden, und so eine regelmäfsige Vertheilung von Magnetpolen in jedem Molekel eines magnetisirten Eisenstückes entsteht. Wenn wir die Magnetisirung nicht an weichem Eisen, welches seinen magnetischen Zustand sogleich wieder verliert, sobald es keiner magnetisirenden Kraft mehr ausgesetzt ist, sondern an hartem Stahl vornehmen, so finden sich nachher in jedem einzelnen der kleinen Stückchen, in die wir den Stahlstab zerbrechen können, zwei entgegengesetzte Magnetpole. Man hat damit den sichtbaren Nachweis geführt, dafs in der That die Magnetisirung eines Stahlstückes sich auf die kleinsten trennbaren Stücke, also in letzter Instanz auf die Molekeln bezieht. Faraday schlofs nun, dafs in elektrischen Isolatoren etwas Aehnliches vorgeht, dafs auch in ihnen eine molekulare Polarisirung stattfindet, bei welcher die in jedem Molekel enthaltene Elektricität sich in der Weise verschiebt, dafs sich zwei elektrische Pole bilden, ein positiver Pol und ein negativer Pol, und dafs durch diese dielektrische Polarisation dann ebenso eine Rückwirkung auf die elektrisirten Körper in der Nähe stattfindet, wie ein Eisenstück, welches magnetisirt worden ist, nun seinerseits anziehende Wirkung auf die Magnete ausübt, die seinen Magnetismus erregt haben. Wenn auf diese Weise eine dielektrische Polarisation eingetreten ist, etwa in der Art, dafs die positive Elektricität durch die elektrisirenden Kräfte in den Molekeln des isolirenden Körpers nach oben gezogen ist, so kehren die Molekel in einer Verticalreihe, die also der Richtung der elektrisirenden Kraft entspricht, einander die befreundeten Pole zu und müssen sich demnach gegenseitig anziehen. Es entsteht also in Richtung dieser Kraftlinien eine Spannung, welche den Theil des Körpers, der in dieser Kraftlinie liegt, zu verkürzen strebt. Andererseits sind die Molekel so geordnet, dafs quer gegen die Spannungslinien die gleichartigen Pole einander am nächsten kommen. Dadurch mufs in dieser Richtung eine abstofsende Wirkung ausgeübt werden, was ein Bestreben zur Ausdehnung in dieser Richtung zur Folge hat. Um nun eine solche Polarisirung hervorzubringen,

müfste bei A (Fig. 3) ein Leiter sein, der negativ geladen ist, und bei B ein solcher, der positiv geladen ist. Es werden dann dieselben Anziehungen, welche die Spannungen verursachen, auch auf die Grenzflächen übergehen müssen, und die Existenz der dielektrischen Polarisation mufs eine Kraftverbindung zwischen den Grenzflächen, die einander gegenüber liegen, herstellen. Das sind Folgerungen, die sich experimentell bestätigen lassen, und die in ganz ähnlicher Weise auch in solchen Fällen, wo magnetisirte Körper in magnetischen Flüssigkeiten liegen, zu beobachten sind.

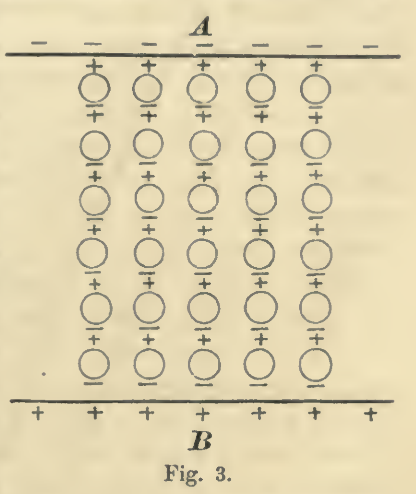


Fig. 3.

Nun schlofs Faraday weiter, dafs es unter diesen Umständen gar nicht nöthig sei, durch den leeren Raum wirkende Fernkräfte anzunehmen, um die geeignete Wirkung an einer entfernten Stelle des Raumes zu erregen, sondern dafs man sich diese Einwirkung in den zwischenliegenden Medien so stark denken könne, dafs die ganze scheinbare Fernkraft durch eine solche Polarisation erklärt würde. Es war dann Clerk Maxwell, welcher die Hypothese weiter ausführte und ihr mathematische Fassung gab. Die Fundamental-Ideen dieser Theorie sind von Faraday in so abstracter Formulirung ausgesprochen worden, dafs sie für seine Zeitgenossen schwer zu verstehen waren. Erst Maxwell's spätere Darstellung und Fassung in bekannte mathematische Gröfsen haben ihr vollständiges Verständnifs herbeigeführt. Die erste Aufgabe der Maxwell'schen Untersuchung war, die entsprechenden Gleichungen zu formuliren und darauf zu prüfen, ob sie eine wirklich consequente und mit den Thatsachen vollständig übereinstimmende Darstellung von den bekannten elektrischen Erscheinungen gaben. Dieses war nun wirklich der Fall, und es liefs sich die Gröfse der vorausgesetzten magnetischen und dielektrischen Polarisation in den magnetischen und elektrischen Kräften unterworfenen Körpern so grofs denken, dafs die Fernwirkungen vollständig auf diese von Körperelementen auf Körperelemente der Nachbarschaft übergehenden Veränderungen zurückgeführt wurden. Damit war die Faraday-Maxwell'sche Theorie wenigstens als möglich nachgewiesen. Dafs solche dielektrische und magnetische Polarisation in der von Faraday vor-

ausgesetzten Wirkung auch neben den Fernkräften vorkommen konnte und vorkommen mufste, war überhaupt nicht mehr zweifelhaft; das konnte durch das Experiment direct nachgewiesen werden. Strittig war eigentlich nur noch, ob auch die Wirkungen im Vacuum in derselben Weise erklärt werden dürften. Man mufste dazu sich vorstellen, dafs auch das den Raum füllende Medium zwischen den Weltkörpern in derselben Weise magnetisch und elektrisch polarisirbar sei, wie die bekannten irdischen Körper. Dieses war ein hypothetischer Rest, welcher weiterer Discussion unterliegen konnte. Es liefs sich aber schon zeigen, dafs selbst, wenn man die Existenz solcher Fernkräfte beibehielt und nur die unzweifelhaften und durch Experimente begründeten Eigenschaften der elektrischen und magnetischen Naturkörper berücksichtigte, man zu der Vorstellung kam, dafs in den elektrischen Isolatoren, welche gleichzeitig polarisirbar waren, auch in der That eine solche freilich nicht augenblickliche, sondern in der Zeit vor sich gehende Fortpflanzung der Schwingungen und Veränderungen zu Stande kommen müsse. Es fragte sich nur noch, ob man das doppelte System beibehalten und Fernkräfte neben den continuirlichen Veränderungen annehmen oder es auf das einfachere System, wie es Faraday und Maxwell aufgestellt hatten, reduciren sollte. Es konnte freilich kaum ein Zweifel darüber bestehen, dafs das Letztere rationeller sei.

§ 5. Die Hertz'schen Schwingungen.

Neuerdings haben wir in den Versuchen von H. Hertz die thatsächlichen Beweise dafür gewonnen, dafs die elektrischen und magnetischen Kräfte Zeit brauchen, um sich durch den Raum auszubreiten. Vorher fehlte uns nämlich immer die Möglichkeit, mit unseren Mefsinstrumenten so aufserordentlich kurz dauernde schwache Bewegungen der Elektricität, wie sie innerhalb der zur Fortpflanzung nöthigen Zeit eintreten können, zu beobachten; denn das Galvanometer gab erst einen Ausschlag, wenn der betreffende Strom eine mäfsige Zeit gedauert hatte. Wenn wir die Dauer eines Stromes auf Zeiten beschränken wollen, wie wir sie durch unsere mechanischen Apparate beobachten können, auf $^1/_{1000}$ bis $^1/_{10000}$ Secunde, so mufs es schon ein sehr starker Strom sein, der in dieser Zeit die Fähigkeit hat, die Magnetnadel des Galvanometers in Bewegung zu setzen. Hertz bemerkte, dafs unter solchen Umständen doch noch Funken leicht zu Stande kommen. Ein elektrischer Funke kann, wie es scheint, zwischen den

Leitern überspringen, wenn auch nur für $^1/_{1000000}$ oder $^1/_{1000000000}$ Sec. die nöthige Potentialdifferenz zwischen den Grenzflächen vorhanden ist. Bei den Funken sind wir, wie es scheint, fast unabhängig von der Zeitdauer, während welcher die Ladungen bestehen. Seitdem hat man zu gleichem Zwecke mit Glück auch andere Methoden benutzt. Es handelt sich meistentheils um Erscheinungen, bei denen zwar aufserordentlich kleine Quanta Elektricität in Wirksamkeit treten, die sich aber unter sehr hohen Spannungen vollziehen. Da ist dann oft die Energie dieser Bewegung, welche dem Product aus dem Quantum der Elektricität und der elektromotorischen Kraft entspricht, grofs genug, um sich zu Wärmeentwickelung in dünnen Drähten zu eignen, die als Zweig einer Wheatstone'schen Brücke angewendet werden können und durch ihre mit der Wärmeentwickelung verbundene Widerstandsänderung den Strom anzeigen. Der Werth der Hertz'schen Entdeckung beruht aber wesentlich darauf, dafs damit Mittel gefunden sind, welche es möglich machen, aufserordentlich kurz dauernde elektrische Vorgänge zu beobachten und zu messen. Nach diesen Untersuchungen ist nun kein Zweifel darüber geblieben, dafs in der That elektrische Oscillationen sich mit einer gewissen endlichen Geschwindigkeit durch den Raum fortbewegen. Soweit wir diese Geschwindigkeit bestimmen können, scheint sie mit der Lichtgeschwindigkeit übereinzustimmen, und dasselbe ist bei den sie begleitenden magnetischen Erscheinungen der Fall, so dafs also die Hauptfrage, ob diese Wirkungen unvermittelt durch direct in die Ferne wirkende Kräfte hervorgebracht werden oder durch continuirliche Veränderungen eines zwischenliegenden Mediums, welche sich nur mit endlicher Geschwindigkeit fortpflanzen, entschieden ist. In diesen elektrischen Oscillationen, die sich durch den Raum ausbreiten, haben wir zugleich auch Schwingungen, die ihrer Zeitdauer nach zwischen den Lichtoscillationen und den Oscillationen strahlender Wärme einerseits und den Schalloscillationen sowie den von uns mit dem Auge zu verfolgenden oscillirenden Bewegungen andererseits liegen, so dafs also bisher noch fehlende Zwischenglieder in ihnen gefunden sind.

Diese elektrischen Oscillationen zeigen nun ganz dieselbe Eigenthümlichkeit in ihrer Verbreitung wie das Licht: sie sind der Reflexion und der Brechung unterworfen, und es kann bei ihnen deutlich eine Polarisation nachgewiesen werden, wodurch sie als Transversalschwingungen erkannt sind. Die elektrischen Oscillationen sind also zweifellos Schwingungen, welche alle objectiven Eigenschaften der Lichtschwingungen besitzen; nur haben sie viel längere

Oscillationsdauer und demgemäſs auch viel gröſsere Wellenlängen und sind dem Auge unsichtbar.

In dem Folgenden ist der Hauptnachdruck auf die elektromagnetische Lichttheorie gelegt; aber wegen des groſsen historischen Interesses sind auch die Anschauungen berücksichtigt, von denen man früher ausgegangen ist, und an denen sich bisher die Vorstellungen und die Sprache der Wissenschaft entwickelt haben. Ohne Kenntniſs dieser Anschauungen kann man sich in die älteren optischen Abhandlungen nicht gut hinein finden, in denen doch eine ungeheure Menge von thatsächlichen Kenntnissen überliefert ist.

Erster Theil.

Elastische Schwingungen in continuirlich verbreiteten Medien.

§ 6. Ebene Wellen.

Zur Einführung in die Lehre von den Schwingungen beginnt man am besten mit den oscillatorischen Bewegungen ponderabler Körper, wie sie z. B. bei der Schallbewegung vorkommen. Wir wissen aus der Erfahrung, dafs solche Oscillationen sich bis in grofse Entfernungen ausbreiten, und dafs diese Verbreitung, wenn sie nach allen Seiten regelmäfsig geschieht, im Wesentlichen so verläuft, dafs die Flächen, in denen eine bestimmte Phase der Bewegung gleichzeitig ankommt, Kugelflächen sind. Je weiter die Bewegung sich von ihrem Erregungscentrum entfernt hat, je gröfser also die Kugelfläche wird, desto ähnlicher wird jedes Quadratcentimeter dieser Kugelfläche einem Theil einer Ebene. Hier wollen wir nun annehmen, dafs der Radius der Kugelfläche so grofs sei, die Bewegung also bereits soweit von ihrem Erregungspunkte sich entfernt habe, dafs wir den Unterschied von einer Ebene völlig vernachlässigen können.

In dem unendlich ausgedehnten Medium, in dem sich die betrachtete Bewegung vollzieht, bezeichnen wir die Orte der einzelnen bewegten Punkte durch die Coordinaten x, y, z, und zwar soll x diejenige Richtung bezeichnen, nach welcher die Wellen sich fortpflanzen. In Richtung der y und z besteht dann kein Unterschied, sondern alle Punkte einer Schicht, die in der Ebene $x = 0$ oder in einer dieser parallelen Ebene liegen, bewegen sich in gleicher Weise, d. h. die Werthe ihrer Verschiebungen sind nur Functionen der Coordinate x und der Zeit t, dagegen unabhängig von y und z.

§ 7. Ebene Longitudinalwellen.

Bei allen uns bekannten Körpern, bei gasförmigen sowohl wie bei flüssigen und festen, können Longitudinalschwingungen vorkommen, d. h. Schwingungen, bei denen die schwingenden Punkte sich in

derselben Richtung bewegen, in welcher der Wellenzug sich fortpflanzt. Wir wollen nun solche Schwingungen hier voraussetzen. Dann geschehen die kleinen Verschiebungen, welche die einzelnen Körpertheile während der Bewegung erleiden, alle in der Richtung der x-Axe; wir wollen sie mit ξ bezeichnen. Wenn nun diese ξ-Verschiebungen der verschiedenen Schichten verschieden grofs sind, so wird an einzelnen Stellen des Körpers die Substanz, welche zwischen zwei der Ebene $x = 0$ parallelen Ebenen liegt, bald zusammengedrängt bald gedehnt werden, je nachdem die Grenzflächen der betreffenden Schicht sich einander nähern oder von einander entfernen. Bei der Wellenbewegung mufs nun immer der Werth des ξ eine continuirliche Function von x sein, d. h. die Function von x, welche ξ darstellt, mufs continuirlich sein und überall endliche Differentialquotienten nach der Coordinate x haben. Eine discontinuirliche Function würde nämlich entweder Zerreifsung des Zusammenhangs oder Ineinanderdringen verschiedener Schichten anzeigen.

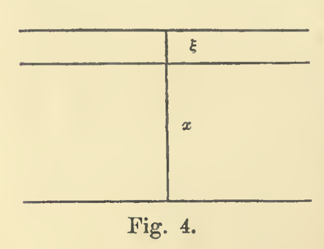


Fig. 4.

Wenn wir eine horizontale Schicht (Fig. 4) von so geringer Dicke in's Auge fassen, dafs wir innerhalb derselben ξ durch eine lineare Function von x ausdrücken können, so wird die Dickenänderung dieser Schicht davon abhängen, ob die ξ-Verschiebung der oberen Fläche gröfser oder kleiner ist, als die der unteren Fläche. Bezeichnen wir die Dicke dieser Schicht mit dx, so wird nach der Veränderung zu dx noch die Differenz der Verschiebungen hinzugekommen sein, welche die beiden Grenzflächen erlitten haben. Wenn wir jetzt einmal mit ξ die Verschiebung an der unteren Fläche bezeichnen, so wird die Verschiebung an der oberen Grenzfläche $\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} . dx$ sein, und die veränderte Dicke der Schicht wird sein

$$dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} . dx = dx . \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right). \tag{10}$$

Da die Grundfläche der Schicht unverändert bleibt, so wird die Volumenänderung, welche jedes Raumelement dieser Schicht unter solchen Umständen erleidet, ebenfalls durch diese Gröfse dargestellt sein.

Nun wissen wir, dafs alle ponderablen Substanzen bei einer Compression sich wieder auszudehnen streben, indem sie einen Druck ausüben, der ihrer Volumenänderung entgegengesetzt gerichtet ist.

Wenn wir als Druck diejenige Kraft definiren, welche auf die Einheit der Oberfläche wirkt, so kann man für alle uns bekannten ponderablen Substanzen annehmen, dafs die dabei auftretende Zunahme des Druckes proportional dem Bruchtheil ist, um welchen das Volumen verändert wird, vorausgesetzt, dafs dieser Bruch klein genug gegen Eins ist. In dem hier betrachteten Falle ist nun $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ der betreffende Bruchtheil, und der Druck, der bei positivem $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ein negativer Druck ist, da er sich im Widerstreben gegen die Expansion äufsert, bei negativem $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ein positiver, mufs dem negativen Werthe dieser Aenderung des Volumens proportional gesetzt werden. Indem wir mit c^2 irgend eine positive Constante bezeichnen, deren Gröfse von der Natur der Substanz abhängt, können wir die Gleichung bilden:

$$p = -c^2 . \frac{\partial \xi}{\partial x} . \tag{11}$$

Wir haben hierin einen Ausdruck für die Kraft, mit welcher der elastische Körper der Volumenänderung der betrachteten Schicht widerstrebt. Was nun für die eine Schicht gilt, gilt auch für jede andere. Die Gesammtkraft, welche auf eine im Innern liegende Schicht wirkt, wird von dem Zustande der Compression in den beiden über und unter ihr liegenden Schichten abhängen. Der Druck der oberen Schicht strebt, diese Zwischenschicht nach unten zu drängen, er wird also in der negativen Richtung der x-Axe wirken; hingegen wird der Druck der unteren Schicht nach oben, also in der Richtung der zunehmenden x-Werthe drängen. Es sind aber diese beiden Drucke nicht gleich. Den positiv wirkenden Druck der unteren Schicht, für welche $dx = 0$ gesetzt wurde, wollen wir mit p bezeichnen; dann ist der in der negativen Richtung wirkende Druck der oberen Schicht gleich $p + \frac{\partial p}{\partial x} . dx$. Somit würde die auf die Einheit der Fläche wirkende Gesammtkraft X, welche die Schicht zu verschieben strebt, den Werth haben:

$$\begin{aligned} X &= p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} . dx\right) \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} . dx . \end{aligned} \tag{12}$$

Setzen wir nun aus Gleichung (11) für p den eben abgeleiteten Werth ein, so erhalten wir:

$$X = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot dx. \tag{12a}$$

Nun können wir nach dem Newton'schen Bewegungsgesetz andererseits die Bewegungskraft, welche auf die Schicht wirkt, auch durch das Product ihrer Masse und ihrer Beschleunigung messen. Indem wir hier die Ausdrücke überall auf Stücke der Schichten beziehen, welche in ihrer horizontalen Ausdehnung sich über eine Flächeneinheit erstrecken, finden wir die Masse der Schicht, wenn wir ihre Dicke mit der Dichtigkeit ihrer Substanz multipliciren. Hier handelt es sich nun um die Masse, welche nicht durch die Volumänderung beeinflufst wird. Wir können also das Volumen und die Dichtigkeit in demjenigen Zustande nehmen, bei dem sich die Schicht in der Gleichgewichtslage befindet. Wir wollen die Dichtigkeit mit h bezeichnen; dann ist die Masse der Schicht gleich $h.dx$. Die Geschwindigkeit ist gleich $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ und die Beschleunigung gleich $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$. Die bewegende Kraft ist also $h.dx.\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, und wir erhalten demnach als Bewegungsgleichung:

$$c^2 . \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} . dx = h . dx . \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

oder

$$c^2 . \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = h \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \tag{13}$$

welche Gleichung wir auch schreiben können:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 . \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{13a}$$

wenn wir $\frac{c^2}{h} = a^2$ setzen. Da h stets positiv ist, so wird auch die Constante a^2 stets positiv sein. Die so erhaltene Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung; sie wird erfüllt, wenn wir die Annahme machen, dafs ξ eine beliebige Function der zusammengesetzten Variablen $q = x + a\,t$ sei, so dafs also

$$\left.\begin{aligned} \xi &= F_{(q)} \\ &= F_{(x + a t)} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

zu setzen ist. Die Function F ist demnach abhängig von q, und q wiederum abhängig von den Werthen x und $a\,t$, die sonst in der Function F nicht vorkommen. Dadurch ist eine besondere Art der

Abhängigkeit der drei Gröfsen von einander festgesetzt. Wir haben nun nach den Grundprincipien der Differentialrechnung:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial x}.$$

Da nun

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 1,$$

so ist also

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial q} \tag{14a}$$

folglich ist $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ ebenfalls eine Function von q. Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \cdot \frac{\partial q}{\partial x} \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \end{aligned}\right\} \tag{14b}$$

Wenn wir die Differentialquotienten nach der Zeit bilden, ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \\ &= a \cdot \frac{\partial F}{\partial q} \end{aligned}\right\} \tag{14c}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= a \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \cdot \frac{\partial q}{\partial t} \\ &= a^2 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}. \end{aligned} \tag{14d}$$

Da nun

$$\frac{\partial^2 F}{\partial q^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

war, so folgt:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \tag{15}$$

Durch die gemachte Annahme über ξ wird also unserer Differentialgleichung genügt.

Wenn wir statt a den Werth $(-a)$ setzen, so bleibt der Werth von a^2 unverändert. Es wird also sowohl:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = F_{(x+at)} \\ \text{als}\quad &\xi = G_{(x-at)} \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

eine Lösung jener Differentialgleichung sein.

Ueber die physikalische Bedeutung dieser Lösungen ist nun Folgendes zu bemerken:

Wenn in der Function $F_{(x+at)}$ der Werth von x um eine Strecke, die mit $\mathfrak{x}$ bezeichnet sein mag, vergröſsert wird, und gleichzeitig der Werth von t um einen solchen Betrag τ abnimmt, daſs

$$\mathfrak{x} = a \,.\, \tau \tag{17}$$

ist, so wird der Werth von q, also auch von F sich nicht ändern. Wenn aber x um eine gewisse Strecke $\mathfrak{x}$ wächst, so heiſst das: man beobachtet die Veränderung ξ an einer Stelle, die einem um $\mathfrak{x}$ gröſseren Werthe von x entspricht; nimmt t um τ ab, so heiſst das: die Beobachtung bezieht sich auf einen um das Zeitintervall τ zurückliegenden Zeitmoment. Wenn also $\xi = F_{(x+at)}$ bei den genannten Aenderungen von x und t ungeändert bleibt, so ist also vor der Zeit τ derselbe Zustand, beziehlich derselbe Werth von ξ in einer Schicht vorgekommen, welche einem gröſseren Werthe von x entspricht. Aendert sich der Werth von x regelmäſsig, aber gleichzeitig auch die Zeit, und zwar so, daſs immer die Gleichung (17) besteht, so wird für alle diese Stellen ξ in den verschiedenen Zeitmomenten denselben Werth haben. Dieser Zusammenhang zwischen $\mathfrak{x}$ und τ ist nun derselbe, welcher bei einer gleichmäſsigen Bewegung vorkommt, die in gerader Linie mit der Geschwindigkeit a fortschreitet, so daſs also gewissermaſsen der Werth von ξ, welcher für die ursprünglichen Werthe des x und t gegeben ist, mit der gleichmäſsigen Geschwindigkeit a sich in der Substanz fortpflanzt, und zwar in der entgegengesetzten Richtung, in welcher x steigt.

In der anderen Lösung dagegen, wo wir die Veränderung ξ mit $G_{(x-at)}$ bezeichnet haben, muſs t um τ zunehmen, wo wieder

$$\mathfrak{x} = a \,.\, \tau$$

ist, wenn ξ unverändert bleiben soll. Die gleichartigen Zustände rücken also hier in der Richtung der steigenden Werthe von x mit steigender Zeit fort.

Die Lösung $\xi = F_{(x+at)}$ bezeichnet also eine Welle, welche mit zunehmender Zeit in Richtung der abnehmenden Werthe von x fortschreitet, während die Lösung $\xi = G_{(x-at)}$ eine Welle bezeichnet, welche mit zunehmender Zeit in der Richtung der steigenden Werthe von x voranschreitet.

Beide Integrale bezeichnen eine Bewegungsweise, wie wir sie beim Schall und bei den Wasserwellen, wo eine gegebene Form der Welle auf der Wasseroberfläche fortläuft, beobachten. In letzterem

Falle können wir uns leicht mechanisch davon überzeugen, dafs das was auf dem Wasser fortschreitet, nur die Form der Bewegung, die Form der Oberfläche ist, die sich aber fortdauernd aus neuen Wassertheilen zusammensetzt, während jedes einzelne Wassertheilchen nur um seine Gleichgewichtslage schwingt, im wesentlichen also an derselben Stelle bleibt. Ebenso läuft auch eine Schallwelle mit constanter Geschwindigkeit durch den Luftraum, und eine Lichtwelle durch den Aether, während die einzelnen Theilchen der Luft, beziehlich des Lichtäthers, nur kleine Bewegungen ausführen. Es ist dieses das charakteristische Zeichen für solche in einem elastischen Medium voranschreitende Oscillationen.

Wenn man für eine Differentialgleichung, die in jedem Gliede die abhängige Variable — hier also ξ — selbst oder ihre Differentialquotienten nach den unabhängigen Variablen — hier x und t —, nur einmal enthält (d. i. eine lineare homogene Differentialgleichung) zwei Lösungen gefunden hat, so kann man auch immer neue Lösungen bilden, indem man solche Integrale mit willkürlichen Constanten multiplicirt und algebraisch addirt.

In unserem Falle erhalten wir also, wenn wir mit A und B zwei willkürliche Constanten bezeichnen, die allgemeine Lösung

$$\xi = A \,.\, F_{(x+at)} + B \,.\, G_{(x-at)}, \tag{18}$$

deren Richtigkeit man leicht nachweisen kann, indem man aus ihr die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ bildet. Sie stellt eine Bewegung dar, bei welcher gleichzeitig ein Zug Wellen in Richtung der zunehmenden x, und ein anderer in Richtung der abnehmmden x fortschreitet. In ihr ist die allgemeinste Form der Lösung dieser Differentialgleichung gegeben.

Die hier besprochene Form der Bewegung kann sich in allen ponderablen Körpern entwickeln; denn diese besitzen alle die Eigenthümlichkeit, dafs sie der bei steigendem Drucke eintretenden Compression widerstehen. Viele von ihnen, nämlich sowohl die festen als auch, was gewöhnlich nicht beachtet wird, die flüssigen Körper besitzen auch die Eigenschaft, dafs sie dem Zug einer dehnenden Kraft Widerstand leisten. Flüssigkeiten sind in dem Zustande, in dem wir sie gewöhnlich finden, lufthaltig und zerreifsen daher sehr leicht; wenn man sie aber mit einiger Sorgfalt luftfrei macht, so vermögen sie einen ganz erheblichen negativen Druck oder Zug auszuhalten, ohne dafs eine Trennung ihrer Theile eintritt. Man kann eine Quecksilbersäule in dem Barometer so luftfrei machen, dafs man

schliefslich durch eine Luftpumpe die Luft unten wegnehmen kann, ohne dafs das Quecksilber weder in sich zerreifst, noch von der Glaswand abreifst.

§ 8. Ebene Transversalwellen.

Wir gehen wieder von der Voraussetzung eines Zuges ebener Wellen aus, welche sich in Richtung der x fortpflanzen, setzen aber voraus, dafs in der betrachteten Schicht, die wir uns ebenso wie vorhin (siehe Fig. 4 auf S. 18), horizontal gelegt denken, keine Verschiebungen nach oben oder unten eintreten, sondern ausschliefslich Verschiebungen parallel der yz-Ebene. Zunächst wollen wir annehmen, dafs die Verschiebungen η nur in der Richtung der y geschehen, und zwar sollen sie in der ganzen Ausdehnung der Schicht gleich grofs sein, so dafs η nur als Function von x und t zu betrachten ist. Bei Flüssigkeiten werden solche Verschiebungen keinerlei Gegenkräfte erregen, vorausgesetzt, dafs die Flüssigkeit nicht von den Wänden zurückgehalten wird. Andererseits wissen wir aber, dafs in starr-elastischen Körpern bei solchen Verschiebungen Gegenkräfte entstehen; denn solche Körper behaupten nicht nur ihr Volumen, sondern auch ihre besondere Form.

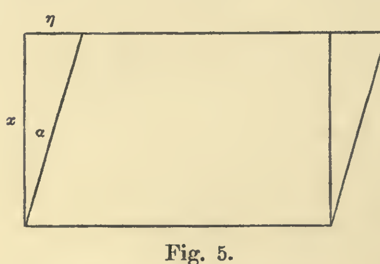


Fig. 5.

Wenn jede höher liegende Schicht gegen die tiefer liegende in gleicher Weise verschoben wird, so wird η von der unteren Fläche bis zur oberen regelmäfsig zunehmen, und wir werden dasselbe daher dem Werthe von x proportional setzen können, was wir in der Form

$$\eta = b \,.\, x$$

schreiben wollen, so dafs die Constante b also gegeben ist durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{\eta}{x} &= b \\ \text{oder} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial x} &= b. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Der Differentialquotient $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ würde demnach die Tangente des Winkels α in der obenstehenden Fig. 5 sein. Nun leisten die elastischen starren Körper gegen solche Verschiebungen Widerstand in

der Art, dafs Gegenkräfte entstehen, welche in unserem Falle die obere Fläche nach links und die untere Fläche nach rechts zu führen streben. Bei sehr kleinen Verschiebungen kann man die entstehenden Gegenkräfte der Constante b proportional setzen. Es ist leicht zu sehen, dafs diese Kraft eine Flächenkraft ist; denn wenn wir eine ausgedehnte Schicht eines solchen Körpers haben und sie in einzelne Theile zerlegen, so wird in jeder Flächeneinheit eine gleich grofse Kraft entstehen, und der Betrag der Gesammtkraft der Gröfse der Fläche proportional sein. Für die Flächeneinheit wird die Gröfse der Kraft, welche der Schiebung widerstrebt, zunächst von einer Constanten abhängen, welche durch die Natur des Körpers bedingt ist; ferner wird sie proportional der Gröfse der Schiebung sein. Die Kraft, welche auf die Flächeneinheit wirkt, würde man also durch

$$Y = \varkappa^2 . b = \varkappa^2 . \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{20}$$

ausdrücken können, worin $\varkappa^2$ eine von der Natur des deformirten Körpers abhängige stets positive Constante bezeichnet. Wenn also in einem Körper verschiedene Schiebungen in den über einander liegenden Schichten eingetreten sind, so werden wir für eine einzelne dieser Schichten die Gesammtkraft, welche auf sie ausgeübt wird, berechnen können, indem wir die Differenz nehmen zwischen der Kraft, welche an ihrer oberen Seite, und derjenigen, welche an der unteren auf sie wirkt. Bezeichnen wir diese Gesammtkraft mit $\mathfrak{Y}$, so wird

$$\begin{aligned} \mathfrak{Y} &= Y_{\text{oben}} - Y_{\text{unten}} = Y_{x+dx} - Y_x \\ &= \frac{\partial Y}{\partial x} . dx \end{aligned} \tag{21}$$

sein, und mit Benutzung der Gleichung (20) erhalten wir

$$\mathfrak{Y} = \varkappa^2 . \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} . dx . \tag{21a}$$

Die bewegende Kraft ist andererseits gleich zu setzen der Beschleunigung multiplicirt mit der Masse für die Flächeneinheit. Letztere ist aber das Product aus der Dichte h und der Dicke der Schicht dx. Es ergiebt sich also die bewegende Kraft gleich $h . dx . \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$, und wir bekommen daher die Gleichung:

$$\varkappa^2 . \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = h . \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} , \tag{22}$$

oder, wenn wir $\frac{\varkappa^2}{h} = a^2$ setzen, so dafs also a^2 eine nothwendig positive Gröfse darstellt,

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 . \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \tag{22a}$$

welche dieselbe Form hat, wie die bei den Longitudinalwellen erhaltene Bewegungsgleichung (15).

Die Integralfunction, welche die vollständige Lösung dieser Differentialgleichung darstellt, mufs daher auch genau dieselbe Form haben, die wir früher bei den Longitudinalwellen fanden, nämlich

$$\eta = A . F_{(x + a t)} + B . G_{(x - a t)}. \tag{23}$$

Es geschehen aber hier die Verschiebungen quer gegen die Richtung, in welcher sich die Wellen fortpflanzen.

Dieselbe Form der Bewegung ergiebt sich natürlich auch, wenn wir die ζ-Verschiebung in Richtung der z-Axe zu berechnen suchen, und jeder dieser Wellenzüge kann auch ungestört durch den anderen mit ihm zugleich bestehen.

Bei den Transversalwellen hängt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Constanten ab, welche den Widerstand gegen die Verschiebung mifst, während bei den Longitudinalwellen diejenige Constante in die Gleichung einging, welche den Widerstand gegen die Volumänderung mifst. Wir finden daher bei den festen Körpern, in denen beide Formen der Bewegung vorkommen können, meistentheils verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Longitudinal- und Transversalwellen.

Bei Körpern, welche gegen Schiebungen der Schichten keinen Widerstand leisten, bei den Flüssigkeiten, können also solche Transversalschwingungen nicht vorkommen. Hierin liegt, wie schon oben angegeben, der Grund, weshalb die ältere Undulationstheorie des Lichtes nothwendig forderte, dafs der Lichtäther ein fest-elastisches Medium sei.[1])

---

[1]) Eine vollständigere Ausführung der Theorie der elastischen Schwingungen wird im zweiten Bande dieser Vorlesungen gegeben.

Zweiter Theil.

Elektromagnetische Schwingungen.

Erster Abschnitt.

Die Maxwell'schen Gleichungen.

§ 9. Die elektromagnetische und die magnetoelektrische Induction.

Wir wollen nunmehr zu der Betrachtung von elektromagnetischen Wellen übergehen. Während elastische Transversalwellen ausschliefslich in starr-elastischen Körpern zu Stande kommen können, sind die elektromagnetischen in allen Aggregatzuständen ponderabler Substanz und selbst in dem scheinbar leeren Weltenraume möglich.

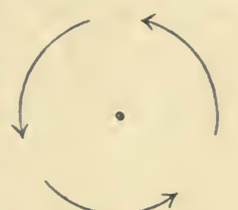


Fig. 6.

Wenn ein positiver elektrischer Strom senkrecht durch die Ebene der Zeichnung (Fig. 6) von hinten nach vorne hindurchgeht, so erzeugt er in seiner Umgebung eine magnetische Kraft, welche einen nordmagnetischen Pol in der entgegengesetzten Richtung des Uhrzeigers im Kreise herumzuführen strebt; denn nach der Ampère'schen Regel sieht eine menschliche Figur, die in diesen Strom so eingeschaltet ist, dafs ihre Füfse nach hinten und ihr Kopf nach vorn gerichtet ist, und die nach einer Magnetnadel blickt, den Nordpol, also überhaupt die nordmagnetischen Partikelchen nach links abgelenkt. Diese Richtung ist in Fig. 6, in welcher der Querschnitt des Stromleiters durch einen Punkt dargestellt ist, durch die Pfeilrichtung bezeichnet. Die magnetische Kraft in der Umgebung des Stromleiters dauert so lange, als der Strom besteht. Wir wissen aus der Erfahrung, dafs auch bei ganz kurz dauernden Strömen dieselbe Kraft auftritt. In den Faraday-Maxwell'schen Anschauungen ist diese Regel auch auf elektrische Ströme von so geringer Dauer

übertragen worden, wie sie in den Molekeln isolirender Körper dadurch entstehen, dafs plötzlich in den sie begrenzenden Leitern sich ein Quantum Elektricität sammelt und eine elektrostatische Kraft hervorruft, die auf den Isolator einwirkt. Nach der Faraday-Maxwell'schen Vorstellung sind nun die Isolatoren und selbst der Aether, d. h. das hypothetische Medium, welches den Weltraum auch da erfüllt, wo keine ponderable Substanz mehr vorhanden ist, nicht indifferent gegen elektrische und magnetische Kräfte, sondern sie werden dielektrisch polarisirt durch elektrische, und magnetisirt durch magnetische Kräfte.

Wenn also durch das Vorhandensein eines elektrischen Stromes magnetische Kräfte auf den den Stromleiter umgebenden Raum wirken, so wird der Aether magnetisirt, und es entsteht eine magnetische Vertheilung in ihm, ähnlich in der Anordnung, wenn auch von viel geringerer Stärke, wie die im Eisen. Es ist durch Messungen festgestellt worden, dafs das Product aus der hierbei wirkenden Kraft und der Länge des geschlossenen Weges, längs dessen sie wirkt, immer einen bestimmten endlichen Betrag hat, welcher von der Stärke des durchgehenden Stromes abhängt. Demgemäfs hat also auch die Arbeit, welche eine solche Kraft hervorbringt, wenn sie die Einheit des Magnetismus einmal rings um den Stromleiter herum führt, einen bestimmten Werth, der nur von der Stromintensität abhängt, und den man als Maafs für diese benutzen kann.

Denken wir uns in der Entfernung r von der Axe des Stromes einen Kreis, und bezeichnen wir mit J die Intensität des elektrischen Stromes, so ist die Intensität der entstehenden magnetischen Kraft bei einem unendlich langen geraden Draht proportional $\frac{\alpha . J}{r}$, worin α eine nur von den gewählten Maafseinheiten abhängige Constante ist. Die Arbeit wird erhalten, indem wir die Kraft mit $2\pi r$, der Länge des Weges, multipliciren, so dafs also die Arbeit proportional dem Product $2\pi J\alpha$ und unabhängig von r ist. Die von Wilhelm Weber eingeführte Festsetzung der elektromagnetischen Maafseinheit für den elektrischen Strom J ist nun so getroffen, dafs $\alpha = 2$ gesetzt ist, und also für die Arbeit A, welche der Strom leistet, wenn er die nordmagnetische Einheit in der Richtung der Kraft längs des kreisförmigen Weges um sich herumführt, die Gleichung:

$$A = 4\pi J \tag{24}$$

besteht. Man kann nun aber das Integral über die Kraft multiplicirt mit der Weglänge auch bilden auf jedem anderen Kreise oder theilweise auf der Peripherie verschiedener Kreise, wenn wir etwa

einen Theil des Weges auf einem Kreise von gröfserem Radius zurücklegen und dann längs eines Radius auf einen Bogen von geringerem Radius übergehen; denn die Kraft hat immer die Richtung der Peripherie und die Kraftcomponente ist Null auf dem Wegstück, welches die Richtung des Radius hat. Gehen wir nun bald in der Richtung des Radius vorwärts, bald zurück, bald in tangentialer Richtung, so würden alle diejenigen Stücke oder Componenten, welche in Richtung des Radius gelegen sind, keinen Beitrag zu dem Werthe der Arbeit liefern.

Das Integral der Kraft, welche der Strom in seiner Nachbarschaft hervorbringt, multiplicirt mit dem Wegelement, auf welchem man vorwärts geht, wollen wir mit $\int k.ds$ bezeichnen; es ist für einen ganzen Umlauf, d. h. für eine geschlossene Linie, welche den Draht umgiebt, nur von der Intensität J abhängig, und es wird auch keinen Unterschied machen, wenn wir die Führung des durchlaufenen Weges aus der Ebene heraus verlegen, indem wir zeitweise in einer Strecke vorwärts gehen, welche senkrecht zur Ebene der Zeichnung steht; denn ein geradliniger Strom bringt in solchen Richtungen keine magnetische Kraft hervor. Das Integral hat demnach, wie wir auch den Weg um den Stromleiter wählen mögen, immer den Werth $4\pi J$, vorausgesetzt, dafs der Sinn der Umkreisung derselbe ist. Dabei wird unter k die in die Richtung von ds fallende Componente der magnetischen Kraft verstanden. Der Werth dieses Integrals $\int k.ds$, erstreckt von einem Punkte x, y, z bis zu einem festen Punkte, den man im allgemeinen ins Unendliche verlegt, hängt zusammen mit dem Begriffe derjenigen Function $\varphi_{(x,y,z)}$, welche man Potentialfunction des Magnetismus im Orte x, y, z zu nennen pflegt.

Dann ist

$$k.ds = -d\varphi. \tag{25}$$

Integriren wir nun über eine den Strom in dem angegebenen Sinne einmal umkreisende geschlossene Bahn, deren Anfang mit dem Index 0, und deren Ende mit dem Index 1 bezeichnet sein möge, so erhalten wir:

$$-\int_0^1 d\varphi = \int_0^1 k.ds = \varphi_0 - \varphi_1 = 4\pi J. \tag{25a}$$

Der Werth der elektromagnetisch gemessenen Stromstärke J, multiplicirt mit 4π, fällt also zusammen mit der Abnahme der magnetischen Potentialfunction, welche sich einstellt, wenn man den Strom einmal in dem angegebenen Sinne umkreist. Diese Potential-

function ist also in der Umgebung des Stromleiters keine eindeutige Function, wie sie es in der Umgebung von magnetischem Stahl oder Eisen ist, sondern wir müssen, um sie eindeutig zu machen, uns eine Fläche durch den Stromleiter gelegt denken, die von dem Stromleiter ringsum begrenzt ist, oder wenn der Stromleiter unendlich ist, sich an der einen Seite ins Unendliche erstreckt. An der Fläche selbst macht die Potentialfunction einen endlichen Sprung ihres Werthes. Wenn wir z. B. in der Richtung des Pfeiles in Fig. 7 herum gehen, wo die Linie (0,1) einen Schnitt der Trennungsfläche bezeichnet, und der Punkt a einen des Stromleiters, so kann die magnetische Potentialfunction überall im ganzen Raume als continuirlich betrachtet werden; nur beim Durchgang durch die Fläche (0, 1) erleidet sie einen Sprung, während die Componenten der magnetischen Kraft auch in und auf beiden Seiten der Fläche durchaus continuirlich sich fortsetzen.

Ampère hat zuerst nachgewiesen, dafs man die magnetischen Wirkungen eines geschlossenen Stromleiters vollkommen gleich setzen könne denen, welche durch eine gewisse Vertheilung entgegengesetzter Magnetismen auf beiden Seiten einer solchen Fläche hervorgebracht werden würden. Nur in der Fläche selbst tritt eine Abweichung ein für die Raumpunkte, welche zwischen den beiden Schichten ihrer imaginären magnetischen Belegung liegen. Rings um diese Fläche auf der Aufsenseite des Stromleiters bleibt noch ein zusammenhängender Raum; aber der gesammte den Stromleiter umgebende Raum wird durch jene Fläche aus einem (nach Riemann'scher Ausdrucksweise) zweifach zusammenhängenden in einen einfach zusammenhängenden verwandelt, in welchem die Potentialfunction nun eindeutig und continuirlich ist, wie die magnetisirter Eisenmassen.

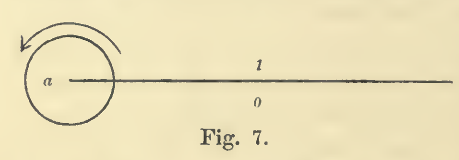


Fig. 7.

Wir haben gesehen, dafs der Potentialsprung zwischen der einen und der anderen Seite dieser Fläche, wo man auch von einem Punkt zu demselben Punkt der anderen Seite hinüber geht, immer den gleichen Werth hat. Eine solche Fläche, welche an ihren beiden Seiten zwei verschiedene Werthe des Potentials besitzt, kann physikalisch hergestellt werden, indem man sie mit einer Doppelschicht des betreffenden Agens belegt. Ein Stahlblech, welches durch senkrecht zu seiner Fläche gerichtete Magnetkräfte magnetisirt wäre, würde ein Beispiel dafür sein; oder auf elektrischem Gebiete ein Conden-

sator, welcher auf der einen Seite positiv und auf der anderen Seite negativ geladen ist, der also nach der ersten Seite hin positives Potential hervorbringt, und negatives Potential nach der anderen Seite. Der Condensator könnte aufserordentlich dünn sein; nur müfste dann auch die elektrische Dichtigkeit auf den beiden Platten entsprechend gesteigert werden.

Die Potentialtheorie lehrt, dafs der Potentialunterschied $\varphi_0 - \varphi_1$, φ_0 auf die magnetisch positive, φ_1 auf die magnetisch negative Fläche bezogen, in einem solchen Falle gleich ist 4π multiplicirt mit derjenigen Gröfse, welche man das Moment der magnetischen Doppelschicht für die Flächeneinheit nennt. Dieses Moment m ist, wenn für die Flächeneinheit das magnetische Quantum $+\mu$ auf der einen Seite und $-\mu$ auf der anderen im Abstand d zu der ersteren parallelen Seite liegt (Fig. 8), gleich

$$m = \mu . d,$$

so dafs also

$$\varphi_0 - \varphi_1 = 4\pi m = 4\pi J \tag{26}$$

und demnach

$$m = J \tag{26a}$$

ist.

Die völlig analogen Beziehungen gelten für eine elektrische Doppelbelegung, wenn eine Schicht positiver Elektricität auf der einen Seite, und eine gleich dichte Schicht negativer Elektricität auf der anderen Seite der Fläche sich befindet.

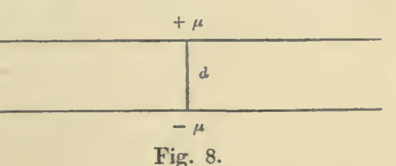


Fig. 8.

Da der Potentialsprung für alle Punkte der Fläche beim Durchgang durch dieselbe gleich ist, so forderte Ampère, dafs seine Hülfsfläche, die er sich durch den Stromleiter gelegt und durch ihn begrenzt dachte, in jeder Flächeneinheit das gleiche magnetische Moment haben müfste. Es wirkt in diesem Falle die doppelt belegte Fläche gerade so auf die Magneten ihrer Umgebung wie ein elektrischer Strom.

Wenn eine elektrische Bewegung in Richtung eines solchen Stromleiters geschieht, so werden also dadurch magnetische Kräfte in der nächsten Umgebung hervorgebracht, und solche magnetischen Kräfte werden in jedem magnetisirbaren Medium auch Magnetisirung erzeugen, d. h. die Vertheilung des Magnetismus in den Molekeln ändern, und wir wissen andererseits aus den diamagnetischen und paramagnetischen Untersuchungen, dafs alle bekannten ponderablen

Körper der Magnetisirung durch magnetische Kräfte unterworfen sind. Da es eine Reihe von Körpern giebt, die diamagnetischen, welche sich in der Gegenwart von Magneten gerade so verhalten, wie es schwach magnetische Körper thun, welche von einer stärker magnetisirbaren Flüssigkeit umgeben sind, so werden wir dadurch zur Annahme einer Magnetisirbarkeit auch des Luftraumes und sogar des Aethers geführt, da die diamagnetischen Versuche ebenfalls im Vacuum gelingen, und müssen uns diese Magnetisirbarkeit des Aethers sogar gröfser als die des Wismuth oder andrer diamagnetischer Körper vorstellen.

Während wir bisher annahmen, dafs die Elektricität in Bewegung war und fanden, dafs diese bewegte Elektricität Magnetismus erzeugte, können wir uns auch den umgekehrten Vorgang denken, dafs nämlich Magnetismus erzeugt wird, oder dafs er seine Stärke ändert, wodurch dann inducirte elektrische Ströme auftreten. Deutlich wahrnehmbar sind diese nur, wenn wir starken Magnetismus schwinden oder entstehen lassen; aber wir können auch bei schwach magnetischen Körpern, je weiter unsere Beobachtungsmethoden verfeinert werden, desto deutlicher nachweisen, dafs beim Aufhören oder Eintreten der Magnetisirung in der Umgebung elektrische Bewegungen hervorgebracht werden. Es entstehen also elektrische Kräfte immer, wenn längs irgend eines magnetisirbaren Fadens eine Veränderung seines Magnetismus eintritt. Denkt man sich nun an Stelle jenes auf der Ebene der Zeichnung (in Fig. 6 auf S. 27) senkrecht stehenden Leiters, den wir uns von einem elektrischen Strom durchflossen dachten, ein lineares magnetisirbares Gebilde, etwa einen Stahl- oder Eisendraht, so hat jede Veränderung seiner Magnetisirung zur Folge, dafs nun um diesen magnetisirten Faden in derselben Weise elektrische Kräfte wirken werden, in der dort magnetische Kräfte auftraten. Sie werden nachweisbar, sobald ein leitender Draht vorhanden ist, in dem diese Kräfte einen Strom erzeugen können. Die Richtung dieses elektrischen Stromes ist aber entgegengesetzt derjenigen, welche ein dauernder Strom haben müfste, um den Draht in derselben Weise zu magnetisiren, wie es bei der Erregung des inducirten Stromes geschieht. Wenn der zur Ebene der Zeichnung senkrecht stehende Stab sich so magnetisirt, dafs sein Nordpol nach vorne, sein Südpol nach hinten liegt, so wird er einen elektrischen Strom induciren, in welchem die positive Elektricität im Sinne des Uhrzeigers ihn umkreist, während umgekehrt ein Strom, der jene Art der Magnetisirung erregen soll, gegen den Sinn des Uhrzeigers kreisen müfste.

§ 10. Die Wechselwirkung zwischen Schichten von elektrischen und magnetischen Stromfäden.

Denken wir uns eine Reihe von neben einander gelagerten elektrischen Strömen, welche untereinander parallel und senkrecht zur Ebene der Zeichnung, die wir uns vertical vorstellen, nach vorne gerichtet sind, so erzeugen sie alle magnetische Kräfte in der Art, wie wir es eben ausgeführt haben, und wie es in Fig. 9 durch die kleinen Pfeile dargestellt ist. Zwischen den Leitern treffen dann diese magnetischen Kräfte in entgegengesetzter Richtung zusammen und heben sich dadurch auf, während sie oberhalb und unterhalb alle gleich gerichtet sind. Wir werden also durch die von uns vorausgesetzte ebene Schicht von elektrischen Strömungen eine Magnetisirung bekommen, die oben nach der einen und unten nach der entgegengesetzten Richtung gerichtet ist, wie es die langen horizontalen Pfeile in Fig. 9 andeuten. Dieses wird nun in der ganzen Länge jener elektrischen Ströme stattfinden, und es wird also oberhalb und unterhalb eine Schicht von magnetischen Fäden liegen, in der die Fäden jeder einzelnen Schicht alle in der gleichen Richtung magnetisirt sind. Das Entstehen dieser Magnetismen wird

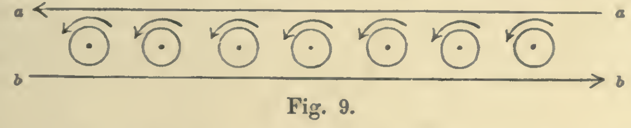


Fig. 9.

abermals ringförmige elektrische Ströme um jeden einzelnen dieser Längsfäden *aa* und *bb* erzeugen, und wiederum werden diejenigen Ströme, welche von gleich gerichteten, derselben Schicht angehörenden Magnetisirungsfäden herrühren, zwischen diesen in entgegengesetzter Richtung auf einander stofsen, also sich aufheben, während die oberhalb und unterhalb der Schicht inducirten elektrischen Ströme gleichgerichtet sind, und zwar quer gegen die magnetischen Kraftlinien, d. h. parallel mit den ursprünglich vorhandenen Stromfäden; und zwar sind diejenigen, welche an den Ort der ursprünglich vorhandenen elektrischen Stromfäden fallen, diesen nach der vorher angegebenen Regel entgegengesetzt gerichtet und schwächen sie; an den äufseren Seiten überwiegen die von der näheren Schicht herrührenden, den ursprünglichen Stromfäden gleichgerichteten Ströme, so dafs nun dort Ströme derselben Richtung neu erscheinen, während dieselben an ihrem ursprünglichen Orte schwinden.

Die eigenthümliche Wechselwirkung zwischen elektrischen und magnetischen Bewegungen, wonach elektrische Bewegung magnetische

Kräfte in querer Richtung und magnetische Bewegung elektrische Kräfte wieder quer gegen die vorigen, also parallel den ersten hervorrufen, bedingt in diesem Falle, dafs die anfänglichen Bewegungen schwinden und dafür neue derselben Art und Richtung, aber an einer anderen Stelle auftreten. Die secundär entstandenen elektrischen Bewegungen wirken dann im Aether, sei er nun gemischt oder ungemischt mit wägbaren Substanzen, von ihrem neuen Orte aus gerade so weiter, wie es die primären Ströme thaten, so dafs die Störung des Gleichgewichts sich nach beiden Richtungen fortschreitend ausbreitet, und an den vorher gestörten Stellen immer wieder ausgeglichen wird.

Bei diesem Vorgange sind also nothwendig immer gleichzeitig magnetische und elektrische Polarisationen vorhanden, beide senkrecht zu einander; und die Fortpflanzung der Wellen geschieht in einer Richtung, die wiederum senkrecht zu der Ebene der elektrischen und magnetischen Verschiebungen ist. Die Oscillationen sind also als transversal zu bezeichnen, wie sie auch in der elastischen Undulationstheorie angenommen werden; aber sie bewegen nicht nothwendig die Substanz ihres Trägers, des Aethers, und sind vollkommen unabhängig von der Art der Festigkeit desselben.

Dieses ist im Wesentlichen die Vorstellung von der Art der Wechselwirkung zwischen magnetischer und elektrischer Bewegung, wie sie durch Maxwell ausgebildet worden ist. Es ist dabei zu bemerken, dafs diese Vorstellung in der dargelegten Form sich nur auf den reinen Aether oder auf elektrisch isolirende Medien übertragen läfst, in denen keine anderweitigen elektrischen Bewegungen vorkommen können, welche die Vertheilung der Elektricität wesentlich verändern, wie das in den leitenden Körpern der Fall ist. Später werden wir sehen, wie die Zustände und Vorgänge in den leitenden Körpern von den hier geschilderten verschieden sind.

§ 11. Die Maxwell'schen Grundgleichungen.

Wir wollen nun die soeben erörterten Verhältnisse quantitativ untersuchen. Wir haben auseinandergesetzt, dafs das Integral der magnetischen Kraft, genommen über einen bestimmten geschlossenen Weg, gleich zu setzen ist der mit 4π multiplicirten Intensität des Stromes, der durch das Innere dieses Weges hindurchgeht, so dafs also

$$\int k.ds = 4\pi J.$$

Nun können wir uns den Weg beliebig gestaltet denken. Nehmen wir einmal an, wir hätten in der yz-Ebene ein Rechteck, dessen

eine Seite in der Richtung von y liegt, die andere in der Richtung von z, wobei die in Fig. 10 durch Pfeile bezeichneten Richtungen als positiv gerechnet werden. Dann wollen wir die magnetischen Kräfte, beziehlich ihre Componenten nach den Coordinaten x, y, z, welche in der betreffenden Gegend des Raumes auf die Einheit der magnetischen Menge ausgeübt werden, mit L, M, N bezeichnen.

Die magnetische Kraft ist ursprünglich durch die magnetische Anziehung und Abstofsung nach dem System von Gauss gemessen worden, und zwar sind die Versuche, auf welche er seine Messungen stützte, im Luftraum gemacht. Seitdem hat man gefunden, dafs der Sauerstoff paramagnetisch ist, in demselben Sinne wie das Eisen. Es kann also eine genaue Uebereinstimmung zwischen den Messungen im Luftraum und denen im Vacuum nicht stattfinden; aber der Unterschied ist so klein, dafs man bis jetzt nicht geglaubt hat, ihn beachten zu müssen. Man wendet daher die in dem lufterfüllten Raume gemachten Bestimmungen ohne Weiteres auf das Vacuum an.

dz

dy

Fig. 10.

Gauss fand durch seine Messungen das Gesetz, dafs zwei Quanta Magnetismus, von denen das eine mit m, das andere mit m_1 bezeichnet sein mag, gegenseitig auf einander mit einer Kraft

$$\frac{m \cdot m_1}{r^2}$$

wirken, genau bestätigt. Dieses Gesetz war zuerst von Coulomb für die Elektricität und den Magnetismus, freilich ohne strenge Prüfung, aufgestellt worden. Für die Elektricität läfst es sich durch die Phänomene ihrer Bindung mit äufserster Genauigkeit bestätigen. Wenn ein elektrisirter Körper, der auf einer Metallplatte durch einen isolirenden Fufs getragen wird, mit einer vollkommen leitenden Hülle irgend welcher Art und Form umgeben ist und man leitet diese Hülle und die Platte, auf der das Ganze ruht, zur Erde ab, so ist aufserhalb keine Spur von elektrischer Wirkung zu beobachten. Es ist dieses nur dann möglich, wenn die Anziehung und Abstofsung beider Elektricitäten im Luftraum nach dem Coulomb'schen Gesetze vor sich gehen, und die auftretenden Kräfte umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung sind. Beim Magnetismus treten Complicationen ein durch den Umstand, dafs wir einen einzelnen magnetischen Pol nicht von seinem Gegenpol trennen können. Indessen ist diese Schwierigkeit bei den Messungen von Gauss, welche

mit Magnetstäben gemacht sind, durch Gebrauch langer Stäbe und theoretische Berechnung des Einflusses des anderen Pols umgangen. Es liefsen sich die Bedingungen der Versuche so wählen, dafs man ihre Ergebnisse unter Anbringung passender Correctionen genau mit den Folgerungen aus den vorausgesetzten mathematischen und geometrischen Vorstellungen vergleichen und zeigen konnte, dafs auch für den Magnetismus das Gesetz vollständige Gültigkeit hat.

Sind m und m_1 einander gleich, so mufs die auftretende Kraft gleich $\frac{m^2}{r^2}$ sein; daraus folgt, wie schon oben auseinander gesetzt worden:

$$\frac{m}{r} = \sqrt{\text{Kraft}}.$$

In diesem Sinne sind also die magnetischen Kräfte absolut gemessen.

Wenn wir nun das Integral $\int k.ds$ hier um den Umfang eines Elementarrechteckes in der yz-Ebene bilden wollen, so kommen für uns in Betracht in der y-Richtung die Componente M, in der z-Richtung die Componente N. Wir werden also, wenn wir in der Richtung des gekrümmten Pfeiles (Fig. 11) herumgehen, zunächst das Glied $(-N.dz)$ zu bilden haben. Für die gegenüberliegende Seite ist derjenige Werth von N, welcher für die um dy vermehrte Coordinate gilt, also $N + \frac{\partial N}{\partial y} dy$, mit positivem Vorzeichen zu nehmen und ebenfalls mit dz zu multipliciren. Analog werden die beiden anderen Glieder gebildet, so dafs wir also erhalten:

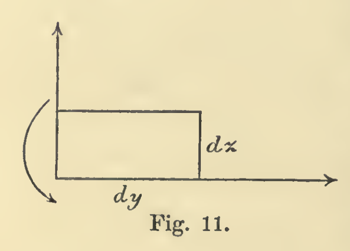


Fig. 11.

$$\int k.ds = -N.dz + M.dy + \left(N + \frac{\partial N}{\partial y} dy\right) dz - \left(M + \frac{\partial M}{\partial z} dz\right) dy$$
$$= \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dy.dz \tag{27}$$

Dieser Werth giebt durch 4π dividirt nach der Gleichung (25a) die elektromagnetisch gemessene Intensität eines Stromes an, der durch das betrachtete Flächenelement dringt, und zwar auf den Leser zu, wenn der Werth positiv ist, von dem Leser fort, wenn er negativ. Wir bezeichnen nun die sogenannte Dichtigkeit der Strömung, d. h. die Elektricitätsmenge (elektromagnetisch gemessen), die in der Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit der yz-Ebene strömt, mit U, wobei U positiv sein soll, wenn der positive Strom auf den Leser

zu gerichtet ist, eine Richtung, die wir von jetzt an als die positive Richtung der x-Axe annehmen wollen. Die Bedeutung dieses Zeichens unterscheidet sich von der des J in Gleichung (25a), welches wir die Intensität des Stromes nannten, dadurch, dafs abgesehen von der Einschränkung auf die der x-Axe parallele Richtung, J den Strom durch den gesammten Querschnitt des Leiters zusammenfafste, während U hier also die Componente der Stromdichtigkeit, welche der x-Axe parallel ist, in der Flächeneinheit des Querschnittes bezeichnet.

Um diejenige Menge zu finden, welche in der Zeiteinheit durch die Fläche $dy.dz$ fliefst, werden wir U mit $dy.dz$ zu multipliciren haben, so dafs wir erhalten:

$$\int k.ds = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) dy.dz = 4\pi U.dy.dz. \tag{28}$$

Die Erfahrungen, welche zu dieser Formel geführt haben, sind aber nur an Leitern gewonnen. In einem isolirenden Raum, wie wir ihn hier voraussetzen, wird die allein mögliche Bewegung der Elektricität darin bestehen, dafs die Polarisation in der x-Richtung wächst, was einer Strömung der Elektricität im Innern der einzelnen Molekeln gleich zu achten ist. Die elektrischen Polarisationen seien mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$, die magnetischen Momente mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, und die elektrischen Kräfte mit X, Y, Z bezeichnet, wobei wir die Momente stets auf die Volumeneinheit beziehen.

Denken wir uns ein Volumen, was parallel der yz-Ebene constanten Querschnitt hat, so werden wir ihm ein Moment $\mathfrak{X}$ zuschreiben können, wenn es abgetrennt von den benachbarten Elementarvolumina für höhere und geringere Werthe des x, an seinen beiden Endflächen $dy.dz$ elektrische Flächenbeläge $\pm e.dy.dz$ hat, sodafs:

$$e.dy.dz.dx = \mathfrak{X}.dx.dy.dz.$$

Da wir bei der Annahme isolirender Substanz in den betrachteten Theilen des Raumes die Annahme des Ueberganges freier Elektricität von einem zum anderen Raumelement ausschliefsen, so müssen wir diese elektrischen Ansammlungen an den beiden Endflächen des Volumenelements durch Verschiebung des ihm ursprünglich angehörigen Gehalts neutralisirter positiver oder negativer Elektricität entstanden denken, und jeder Zunahme des Moments $d\mathfrak{X}$ wird ein entsprechender Flufs des positiven Quantum de von der negativen Grenzfläche zur positiven entsprechen müssen, sodafs in der That die Gröfse

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} . dt = \frac{\partial e}{\partial t} . dt$$

einer elektrischen Strömung entspricht, deren Dichtigkeit U durch $\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$ gemessen wird. Wir erhalten also:

$$\int k . d s = \left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) . dy . dz = 4 \pi \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} . dy . dz \tag{29}$$

Die Gleichung würde in dieser Gestalt stehen bleiben können, wenn wir hier die Elektricität nach elektromagnetischen Stromeinheiten messen wollten. Da wir aber auch noch die elektrostatischen Wirkungen zu betrachten haben, so ist es rathsam, dafs wir einerseits die magnetischen Gröfsen nach dem durch Gauss eingeführten und auf den Messungen im Luftraum begründeten magnetischen Maafse messen, und andererseits die elektrischen Gröfsen nach elektrostatischem Maafse. Wir werden also noch diejenige Constante einführen müssen, welche uns das elektromagnetische Maafs in elektrostatisches umwandelt; wir wollen sie mit A bezeichnen. Wir bekommen also die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}\right) . dy . dz = 4 \pi A . \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} . dy . dz . \tag{29a}$$

Auf beiden Seiten können wir nun durch $dy . dz$ dividiren.

Es ist ersichtlich, dafs sich für Strömungen der Elektricität in der Richtung der y- und z-Axe völlig symmetrische Gleichungen ergeben, so dafs wir also erhalten:

$$\left.\begin{aligned} 4 \pi A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ 4 \pi A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ 4 \pi A \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Diese Gleichungen gelten streng genommen nur für den Luftraum; denn unsere bisherigen Messungen der Gröfse A sind im Luftraum gemacht worden, wie denn überhaupt alle bisherigen Bestimmungen der elektrischen und magnetischen Einheiten sich stets auf den Luftraum beschränkten. Wir werden sehen, dafs man beim Uebergang auf andere Körper noch gewisse Factoren hinzufügen mufs, die der abweichenden Beschaffenheit dieser Körper entsprechen.

Ganz dieselbe Betrachtungsweise gilt für die Aenderung der magnetischen Momente. Wenn die Magnetisirung eines Stabes sich plötzlich ändert, also wächst oder abnimmt, so entstehen ringsum elektrische Kräfte. Dieses würde zu einer ähnlichen Reihe von Gleichungen führen. Es ist dabei nur zu bemerken, wie schon vorher hervorgehoben wurde, dafs in der Beziehung des bewegten Magnetismus zu den elektrischen Kräften ein Unterschied insofern besteht, als die elektrische Bewegung, welche durch entstehenden Magnetismus hervorgebracht wird, entgegengesetzt ist derjenigen elektrischen Bewegung, welche nöthig ist, um diesen Magnetismus hervorzubringen. Das hat nun hier zur Folge, dafs wir beim Aufstellen der Gleichungen für elektrische Kräfte, also für diejenigen Kräfte, die wir als elektromotorische Inductionskräfte kennen gelernt haben, und die sich in den metallischen Leitern sehr kräftig wirksam zeigen, die Differenzen umkehren müssen. Wir bekommen also z. B.:

$$4\pi B \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}.$$

Wenn wir als Einheiten für die hier vorkommenden elektrischen und magnetischen Gröfsen die erwähnten elektrostatischen und die von Gauss definirten magnetischen benutzen, so fordert das Gesetz von der Constanz der Energie, dafs die Constante B gleich der in den Gleichungen (30) vorkommenden Constante A ist[1]. Wir gelangen demnach hier zu den Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Die Gleichungen (30) und (31) sind die sechs ursprünglichen Maxwell'schen Gleichungen für die Fortpflanzung dieser elektrischen und magnetischen Wirkungen durch den Aether.

§ 12. Ein particuläres Integral der Maxwell'schen Gleichungen.

Die empirischen Untersuchungen über die Einwirkung der magnetischen Kräfte auf magnetisirbare Substanzen und elektrischer Kräfte auf elektrische Isolatoren haben ergeben, dafs innerhalb einer

1) Siehe Bd. IV dieser Vorlesungen.

gewifsen Grenze der Kraftintensitäten die Polarisationen, welche durch eine gegebene Kraft entstehen und in die Richtung dieser Kraft hineinfallen, wenigstens bei isotropen Körpern, d. h. Körpern, die nach allen Richtungen dieselben Eigenschaften zeigen, der einwirkenden Kraft proportional sind, dafs man also die dielektrischen Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der elektrischen Kraft, welche diese Momente hervorzubringen strebt, proportional setzen kann. Um sie zu erhalten, mufs man also die Kraft mit einer Constanten multpliciren, welche von der Natur der Substanz abhängt, und die wir mit $\frac{\varepsilon}{4\pi}$ bezeichnen wollen. Im reinen Aether würde $\varepsilon = 1$ zu setzen sein.

Gemäfs der gewählten Bezeichnung bilden wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi.\mathfrak{X} &= \varepsilon.X \\ 4\pi.\mathfrak{Y} &= \varepsilon.Y \\ 4\pi.\mathfrak{Z} &= \varepsilon.Z \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Da andererseits für die magnetischen Polarisationen die analogen Beziehungen gelten, so ergiebt sich bei Einführung der entsprechenden Constante μ:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi.\mathfrak{L} &= \mu.L \\ 4\pi.\mathfrak{M} &= \mu.M \\ 4\pi.\mathfrak{N} &= \mu.N \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Nun wollen wir annehmen, dafs die vorkommenden Kräfte und Momente nicht von y und z, sondern nur von x und t abhängen; dann sind alle Differentialquotienten nach y und z gleich Null zu setzen. Unter dieser Annahme verwandeln sich die Gleichungen (30) in:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= 0, \text{ also } \mathfrak{X} = 0 \text{ oder constant nach der Zeit.} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= -\frac{\partial N}{\partial x} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

und das Gleichungssystem (31) in:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= 0, \text{ also } \mathfrak{L} = 0 \text{ oder constant nach der Zeit.} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= -\frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Die Functionen $\mathfrak{M} = \frac{\mu . M}{4\pi}$ und $\mathfrak{Z} = \frac{\varepsilon . Z}{4\pi}$ einerseits, und $\mathfrak{N} = \frac{\mu . N}{4\pi}$ und $\mathfrak{Y} = \frac{\varepsilon . Y}{4\pi}$ andererseits kommen nun in getrennten Gleichungspaaren unabhängig von einander vor. Wir können daher jedes einzelne Paar unabhängig vom andern auflösen. Wenn wir

$$\left.\begin{aligned} & M = 0 \\ \text{und} \quad & Z = 0 \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

setzen, so haben wir nur für die beiden auf N und Y bezüglichen Gleichungen

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = -\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = -\frac{\partial Y}{\partial x}$$

Lösungen zu suchen.

Wir wollen jetzt

$$\left.\begin{aligned} & N = N_0 . e^{in\left(t - \frac{x}{h}\right)}, \quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}_0 . e^{in\left(t - \frac{x}{h}\right)}, \\ \text{und} \quad & Y = Y_0 . e^{in\left(t - \frac{x}{h}\right)}, \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_0 . e^{in\left(t - \frac{x}{h}\right)}, \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

setzen, worin N_0, $\mathfrak{Y}_0$, Y_0 und $\mathfrak{N}_0$ eventuell complexe Werthe haben können. Es ist dann:

$$\left.\begin{aligned} & -\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{in}{h} N_0 e^{in\left(t - \frac{x}{h}\right)} = 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = 4\pi A in \mathfrak{Y}_0 e^{in\left(t - \frac{x}{h}\right)} \\ \text{und} \\ & -\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{in}{h} Y_0 e^{in\left(t - \frac{x}{h}\right)} = 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = 4\pi A in \mathfrak{N}_0 e^{in\left(t - \frac{x}{h}\right)}, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

also

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{h} N_0 &= 4\pi A \mathfrak{Y}_0 \\ \frac{1}{h} Y_0 &= 4\pi A \mathfrak{N}_0 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Nun folgt aus den Gleichungen (32) und (33) für $t = \frac{x}{h}$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi \mathfrak{Y}_0 &= \varepsilon . Y_0 \\ 4\pi \mathfrak{N}_0 &= \mu . N_0 \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichungen (39) ein und multiplicirt diese dann miteinander, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{h^2} = A^2 . \varepsilon . \mu . \tag{41}$$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so stellen die von uns angenommenen Werthe, welche ja sowohl Functionen der Zeit als auch des Ortes sind, Bewegungen dar, die den abgeleiteten Formeln entsprechen. In den eingeführten Werthen ist überall der Factor $e^{in\left(t-\frac{x}{h}\right)}$ enthalten, der eine Function von $x - ht$ ist. Wir haben nun aber in § 7 gesehen, dafs jede derartige Function eine Bewegung darstellt, welche in Richtung der positiven Werthe von x mit der Geschwindigkeit h fortrückt. Der Werth von h ist aber in Gleichung (41) durch die Constante A und durch ε und μ gegeben.

Zerlegen wir jede der Lösungen in ihren reellen und imaginären Theil, so kommt in ersterem der Factor $\cos n\left(t-\frac{x}{h}\right)$, in letzterem der Factor $\sin n\left(t-\frac{x}{h}\right)$ vor. Beide Theile stellen also der Zeit nach periodische Bewegungen dar, die in Richtung der x fortschreiten, während die elektrischen Oscillationen $\mathfrak{Y}$ in Richtung der y, die magnetischen $\mathfrak{N}$ in Richtung der z geschehen; beide sind also normal zu einander und normal zu derjenigen Richtung, in der die Wellen voranschreiten.

Es zeigt sich demnach in der That, dafs elektrische und magnetische Transversalwellen vor sich gehen können.

In dem anderen Falle, den die Gleichungen (34) und (35) zulassen, wo $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Z}$ von Null verschieden gesetzt werden, geschehen umgekehrt die elektrischen Schwingungen in der z-Richtung, die magnetischen in der y-Richtung; aber während $\mathfrak{N}_0$ und $\mathfrak{Y}_0$ in Gleichung (39) gleiches Vorzeichen haben, würden $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{Z}_0$ entgegengesetztes Vorzeichen bekommen, falls nicht gleichzeitig die Fortpflanzungsgeschwindigkeit h negativ wird. Auch in diesem Falle pflanzen sich die elektrischen wie die magnetischen Oscillationen mit gleicher absoluter Geschwindigkeit h in der x-Richtung fort und zwar mit derselben wie das zuerst gefundene System.

Da übrigens die Gleichung (41) nur den Werth von h^2 giebt, so kann man als Wurzel davon ebenso gut $+h$ wie $-h$ wählen, die Fortpflanzung kann also ebenso wohl in der Richtung der zunehmenden wie der abnehmenden Werthe von x geschehen. Die Gröfse dieser Geschwindigkeit h hängt von der Constanten A ab, welche sich auf die Reduction der elektrostatischen Einheit auf die elektromagnetische Einheit bezieht, und welche somit direct auf elektromagnetischem Wege zu bestimmen ist.

Aus den Vorzeichen von $\mathfrak{N}_0$ und $\mathfrak{Y}_0$ oder von $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{Z}_0$ folgt, dafs, wenn der Beschauer in Richtung der Fortpflanzung der Wellen

auf eine Schicht hinblickt, in der positive Elektricität sich parallel seiner Längsaxe von seinen Füfsen nach seinem Kopfe bewegt, der Nordmagnetismus dieser Schicht in der Bewegung nach rechts begriffen sein mufs. Beide Arten der Polarisation müssen ihre Maxima und Minima gleichzeitig in jeder Schicht erreichen. Umkehrung der magnetischen Bewegung, ohne solche der elektrischen, würde auch die Fortpflanzungsrichtung umkehren. Gleichzeitige Umkehrung beider Oscillationen würde die Fortpflanzungsrichtung ungeändert lassen, denn die Gleichungen (39) bleiben bei Verwandlung von N_0 in $-N_0$ und $\mathfrak{N}_0$ in $-\mathfrak{N}_0$ und bei ungeänderten $\mathfrak{Y}_0$ und Y_0 nur bestehen, wenn zugleich h in $-h$ verwandelt wird.

§ 13. Die erforderlichen Eigenschaften des Aethers.

Was bei den Schwingungen sich verändert, sind die elektrischen oder magnetischen Polarisationen des Mediums, in welchem die Schwingungen sich vollziehen. Um nun die Fortpflanzung des Lichtes in dem Raum zwischen den Gestirnen, der frei von allen Spuren ponderabler Materie ist, erklären zu können, mufs auch die elektromagnetische Theorie des Lichts ein Medium annehmen, welches den Weltraum auch da, wo ponderable Materie nicht nachzuweisen ist, erfüllt. Es mufs also insofern dieselbe Annahme, wie bei der Undulationstheorie gemacht werden; aber während diese dem Aether die Eigenschaften eines fest-elastischen Körpers zuschreiben mufs, braucht man in der elektromagnetischen Theorie über die Art seines inneren Zusammenhanges gar keine Annahme zu machen. Es genügt, dafs der Aether fähig ist, magnetisirt und in der Weise eines Isolators elektrisirt zu werden, nämlich so, dafs in seinen kleinsten Theilchen eine gewisse elektrische Vertheilung, eine sogenannte dielektrische Polarisation, wie sie Faraday genannt hat, möglich ist.

In Bezug auf die Abhängigkeit der magnetischen und dielektrischen Momente von den sie bewirkenden Kräften wissen wir, dafs eine magnetisirungsfähige Substanz desto stärker magnetisch wird, je gröfser die magnetische Kraft ist, welche auf sie einwirkt; aber die Gröfse der Magnetisirung ist bei gleicher einwirkender Kraft im Allgemeinen sehr verschieden. Eisen und eisenähnliche Metalle nehmen aufserordentlich hohe Magnetisirungen an, die meisten anderen Körper hingegen nur sehr schwache. Es giebt aufserdem, wie schon bemerkt, eine Klasse von Körpern, die diamagnetischen, welche bei oberflächlicher Betrachtung unter dem Einflufs einer magnetisirenden Kraft eine entgegengesetzte Magnetisirung annehmen wie das Eisen.

Die diamagnetischen Substanzen dürfen wir für schwächer magnetisirbar halten als den Aether.

Stets nehmen mit der magnetischen Kraft auch die magnetischen Momente in den Substanzen zu, und bei kleinen Magnetisirungen und kleinen magnetisirenden Kräften sind die Momente den magnetisirenden Kräften, durch welche sie hervorgerufen werden, annähernd proportional. Oben haben wir schon in unseren Gleichungen (33) eine solche Annahme der Proportionalität gemacht. Genau trifft dieses, wenigstens bei den stark magnetischen Körpern, nicht zu; es ist sogar die Magnetisirung bei ihnen nicht allein von der Kraft abhängig, welche zur Zeit einwirkt, sondern auch von den vorausgegangenen Zuständen, so dafs stets eine gewisse Annäherung an die letzteren besteht. Beim Stahl und dem mit geringen Mengen anderer Substanzen, wie Kohle, Wolfram, Kiesel, Phosphor, versetzten Eisen reden wir in diesem Sinne von den Wirkungen einer sogenannten Coercitivkraft, welche den vorausgegangenen Zustand gegen die zur Zeit einwirkenden Kräfte gleichsam zu erhalten strebt, so dafs also z. B. durch schwache magnetische Kräfte der Stahl verhältnifsmäfsig schwach magnetisirt wird, schwächer als weiches Eisen, indem ein Rest seines früheren unmagnetischen Zustandes bestehen bleibt. Ist Stahl aber durch grofse magnetische Kräfte einmal magnetisirt worden, so kehrt er, auch wenn die magnetisirende Kraft aufhört, nicht ganz wieder in den unmagnetischen Zustand zurück.

Es mag hier schon darauf hingewiesen sein, dafs wir in der Optik fast nur schwach magnetische Körper zu berücksichtigen haben, wo mit grofser Annäherung die Annahme genügt, dafs das in dem Elementarvolumen der Substanz entstehende magnetische Moment der magnetischen Kraft proportional ist.

Bei den elektrisch polarisirbaren Substanzen scheint diese Annahme der Proportionalität im Ganzen viel besser zuzutreffen; aber es besteht auch da eine Wirkung, welche wir als elektrische Nachwirkung zu bezeichnen pflegen, indem ebenfalls die vorausgegangenen Zustände sich bis zu einem gewissen Grade erhalten und nur langsam verschwinden.

Die magnetische Coercitivkraft hat mehr den Charakter einer haftenden Reibung, die bis zu einer gewissen Grenze schwachen bewegenden Kräften widersteht, sie verhindert, eine Bewegung hervorzubringen, wie dieses etwa bei der Reibung eines schweren Körpers der Fall ist, der ohne abzugleiten auf einer rauhen wenig geneigten Fläche liegt; während die elektrische Nachwirkung mehr

dem Widerstande ähnlich ist, der bei einer zähen Flüssigkeit vorkommt.

Abgesehen von dieser magnetischen Nachwirkung oder der magnetischen Coercitivkraft sind aber auch bei starken magnetischen Kräften die Magnetisirungen nicht genau den Veränderungen der wirkenden Kräfte proportional. Es zeigt sich vielmehr, dafs z. B. $\mathfrak{L}$ eine Function von L ist, welche zwar anfangs bei Zunahme der magnetisirenden Kraft dieser ziemlich proportional wächst, später jedoch sich einem Maximum nähert. Aber auch selbst bei ganz schwachen Magnetisirungen ist die Magnetisirung der einwirkenden Kraft nicht genau proportional. Unter diesen Umständen ist die oben eingeführte Constante $\frac{\mu}{4\pi}$ eigentlich als der Differentialquotient $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial L}$ anzusehen. In diesem Sinne würde $\frac{\mu}{4\pi}$, wenn wir unsere Betrachtung nur auf kleine Aenderungen der Magnetisirung beschränken, durch die Tangente der Neigung der in der Fig. 12 dargestellten Curve gegeben sein. Da wir es aber, wie schon erwähnt, in der Optik nur mit sehr schwachen Aenderungen der Magnetisirung zu thun haben, so können wir ohne beachtenswerthen Fehler die einfachere Annahme der völligen Proportionalität zwischen der Gröfse der Magnetisirung und der Gröfse der magnetischen Kraft beibehalten, wie sie Poisson in seiner Theorie des Magnetismus ursprünglich eingeführt hat.

Die völlig analogen Betrachtungen und Annahmen gelten auch hinsichtlich der dielektrischen Polarisation des Aethers.

§ 14. Die magnetische und elektrische Dichtigkeit während der Schwingungen.

Die Maxwell'schen Gleichungen sagten aus, dafs eine Constante, multiplicirt mit der Aenderung des magnetischen Momentes in Richtung der x-Axe gleich ist der Differenz zweier Differentialquotienten der elektrischen Kraft, wobei vorausgesetzt ist, dafs die Gröfse der Momente immer auf die Volumeneinheit des betreffenden Körpers bezogen ist, und dafs die magnetisirende Kraft durch die Anziehungskraft gemessen wird, welche von ihr auf die

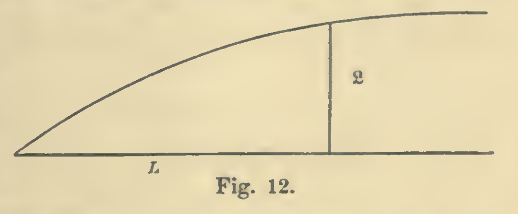


Fig. 12.

Einheit des Magnetismus im Luftraum ausgeübt wird. Die betreffenden Gleichungen (31) lauteten:

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Wenn wir die erste dieser Gleichungen nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differentiiren und dann alle addiren, so heben sich die Glieder der rechten Seite fort und es entsteht die weitere Gleichung:

$$4\pi A \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z}\right\} = 0 \tag{42}$$

die also in den drei anderen bereits enthalten ist. Da A hier eine Constante bezeichnet, welche von dem Verhältnifs der elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten der Elektricitätsmengen abhängt, so folgt aus der letzten Gleichung, dafs die Gröfse, von der hier der Differentialquotient nach der Zeit genommen ist, von der Zeit nicht abhängig sein kann, sondern an jeder einzelnen Stelle des Raumes eine Constante nach der Zeit sein mufs, die aber an verschiedenen Stellen des Raumes verschiedene Werthe haben kann. Wir wollen sie mit τ bezeichnen, so dafs also

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = \tau. \tag{43}$$

Es würde somit τ eine von der Zeit unabhängige Function der Coordinaten sein. Wir werden nachher sehen, dafs diese Gröfse dem entspricht, was wir die magnetische Dichtigkeit der betreffenden Stelle nennen.

Das magnetische Moment $\mathfrak{L}$ sagt aus, dafs in einem bestimmten Elementarvolumen der Nord-Magnetismus je nach dem Vorzeichen von $\mathfrak{L}$ eine Verschiebung in der positiven oder negativen x-Richtung erlitten hat, so dafs auf der einen Seite des betreffenden Volumelements Nord-Magnetismus von seinem räumlichen Zusammentreffen mit Süd-Magnetismus frei wird. Andererseits können wir die Gröfse des magnetischen Momentes $\mathfrak{L}$ auch in der Weise auffassen, dafs, wenn

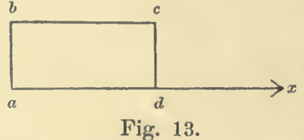


Fig. 13.

z. B. eine positive Polarisation $\mathfrak{L}$ besteht, ein bestimmtes Quantum von Nord-Magnetismus in der positiven x-Richtung vorwärts geschoben ist, während zugleich der Süd-Magnetismus in der negativen x-Richtung rückwärts geschoben ist. Die Gröfse $\mathfrak{L}$ mifst also in diesem Sinne das Quantum von positivem Magnetismus, welches durch den Querschnitt einer das Element schneidenden Fläche in der positiven x-Richtung hindurch gegangen ist, vermehrt um die absolute Menge von negativem Magnetismus, der in der negativen x-Richtung hindurch gegangen ist.

Wenn wir ein solches Volumelement haben und $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}$ positiv ist, also die Werthe von x in Fig. 13 nach rechts hin wachsen, und $\mathfrak{L}$ eine Verschiebung des Magnetismus nach rechts bezeichnet, so würde bei Ausbildung dieser Polarisation $\mathfrak{L}$ durch die Fläche $ab = dy.dz$ in das Volumelement das Quantum $\mathfrak{L}.dy.dz$ von Magnetismus hineingeschoben, und auf der anderen Seite würde aus dem Volumen durch die Fläche $cd = dy.dz$ ein Quantum hinausgeschoben sein, welches aber nicht mehr demselben Werth von $\mathfrak{L}$ entspricht, der bei ab, wo $dx = 0$ ist, angegeben wurde, sondern welches gleich ist:

$$dy.dz\left(\mathfrak{L} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} dx\right).$$

Wenn wir diese beiden Glieder algebraisch addiren, so ergiebt sich

$$-\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x}.dx.dy.dz.$$

Das ist also das Quantum Magnetismus, welches in das Volumen mehr eingetreten ist, als aus dem Volumen ausgetreten war. Das erste Glied von τ in Gleichung (43), würde demnach die Menge des Magnetismus bezeichnen, welche in der x-Richtung aus der Volumeinheit mehr ausgetreten, als in dieselbe eingetreten ist. Die beiden anderen Glieder sagen das Analoge hinsichtlich der y- und z-Richtung aus. Der ganze Werth von τ zeigt demnach an, wie viel Magnetismus bei der gesammten Verschiebung d. h. durch das Entstehen der Polarisationen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ aus dem Volumen mehr ausgetreten als eingetreten ist.

Die aus den Maxwell'schen Grundgleichungen abgeleitete Gleichung (42) ergiebt also, dafs das in dem gegebenen Körperelement vorhandene gesammte Quantum von Magnetismus, welches unabhängig von den magnetisirenden Kräften, die zur Zeit einwirken, dort besteht, unverändert bleibt. Nach dem Vorgange von H. Hertz pflegt man dieses jetzt den wahren Magnetismus des Volum-

elements zu nennen. Eine Anhäufung von wahrem Magnetismus, wie sie z. B. an den Polen eines Stahlmagneten vorhanden ist, würde also, soweit unsere Gleichungen gelten, unveränderlich bleiben müssen.

Die MAXWELL'schen Gleichungen beziehen sich also nur auf solche Veränderungen des Magnetismus, wie sie temporär durch elektrische Ströme, die auf diese Substanz anfangen einzuwirken, oder durch die Bewegung von Magneten und magnetisirbaren Körpern gegen einander, eintreten können.

Aehnliche Gleichungen lassen sich, wie wir gesehen haben, auch in Bezug auf die elektrischen Momente aufstellen, und aus ihnen folgt in analoger Weise, dafs

$$4\pi A \,.\, \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) = 0 \tag{44}$$

ist, und dafs also, soweit diese Gleichungen gelten, in jedem Volumelement die Quantität der Elektricität der Zeit nach constant bleibt. Wir wollen hier

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = \sigma \tag{45}$$

setzen, so dafs also wiederum σ eine der Zeit nach constante Function der Coordinaten bezeichnet. Die Gleichung (44) sagt demnach zunächst aus, dafs die MAXWELL'schen Gleichungen (30) sich in der bisherigen Form nur auf elektrisch isolirende Körper beziehen können.

Wir werden später unsere Voraussetzungen erweitern und die hier abgeleiteten Sätze in allgemeinerer Form wieder finden, wobei wir sie auch auf leitende Medien ausdehnen können.

§ 15. Beziehungen zwischen verschiedenen Lösungssystemen der Maxwell'schen Gleichungen.

Wir haben soeben gefunden, dafs

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = \sigma$$

eine von der Zeit unabhängige Gröfse ist, die aber eine Function der Coordinaten sein kann. Ferner hat sich früher (§§ 12 und 13) ergeben, dafs in erster Annäherung die Werthe der elektrischen Momente, $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, durch die Werthe der elektrischen Kräfte, X, Y, Z,

multiplicirt mit einem geeigneten Factor, auszudrücken sind, so dafs wir also schreiben können:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}.X\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}.Y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}.Z\right)=\sigma \qquad (45\text{a})$$

Fügen wir hierzu noch die Gleichungen (31)

$$4\pi A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$4\pi A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}$$

$$4\pi A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}$$

so sind dieses vier Gleichungen, welche sich auf die Werthe der elektrischen Kräfte, X, Y, Z, beziehen.

Solche Differentialgleichungen aber, in denen die Unbekannten und die Differentialquotienten der Unbekannten nur so auftreten, dafs keines mit dem anderen multiplicirt ist, oder ins Quadrat oder in höhere Potenzen erhoben ist, nennen wir lineare Differentialgleichungen, und zwar homogene, wenn die veränderlichen Gröfsen oder deren Differentialquotienten in allen Gliedern als Factor einmal vorkommen. Dieses ist nun aber bei unseren Differentialgleichungen nicht der Fall, sondern sie sind nicht-homogene lineare Differentialgleichungen, da Glieder vorhanden sind, welche weder die zu suchenden Gröfsen X, Y, Z, noch deren Differentialquotienten enthalten.

Die Werthe der Unbekannten sind bestimmt durch die Functionen, die wir zunächst bei der weiteren Behandlung dieser Gleichungen als gegeben ansehen wollen, nämlich durch σ und die ersten Differentialquotienten nach der Zeit von $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, und $\mathfrak{N}$.

Wenn wir zwei oder mehrere Systeme von Werthen X, Y, Z als Functionen der Zeit und der Coordinaten gefunden haben, welche in die Differentialgleichungen eingesetzt, diesen genügen, so läfst sich zunächst nachweisen, dafs die verschiedenen Integralwerthe für X, Y, Z sich nur um Gröfsen unterscheiden können, welche Differentialgleichungen genügen, die man aus den ursprünglichen erhält, indem man die gegebenen Functionen, nämlich σ und die drei Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}$, gleich Null setzt.

Haben wir z. B. ein System von X, Y, Z gefunden, dem wir die bisherige Bezeichnung lassen wollen, und ferner ein zweites System X_0, Y_0, Z_0, so dafs also

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot X_0\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot Y_0\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot Z_0\right)=\sigma$$

$$4\pi A\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}=\frac{\partial Y_0}{\partial z}-\frac{\partial Z_0}{\partial y}$$

$$4\pi A\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t}=\frac{\partial Z_0}{\partial x}-\frac{\partial X_0}{\partial z}$$

$$4\pi A\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t}=\frac{\partial X_0}{\partial y}-\frac{\partial Y_0}{\partial x}$$

so würde aus diesen Gleichungen zunächst sich ergeben, dafs

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}&=\frac{\partial Y_0}{\partial z}-\frac{\partial Z_0}{\partial y}\\ \frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}&=\frac{\partial Z_0}{\partial x}-\frac{\partial X_0}{\partial z}\\ \frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}&=\frac{\partial X_0}{\partial y}-\frac{\partial Y_0}{\partial x}\end{aligned}\right\}\quad(46)$$

Diese Gleichungen lassen sich nun auch schreiben in der Form:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(Y-Y_0)-\frac{\partial}{\partial y}(Z-Z_0)&=0\\ \frac{\partial}{\partial x}(Z-Z_0)-\frac{\partial}{\partial z}(X-X_0)&=0\\ \frac{\partial}{\partial y}(X-X_0)-\frac{\partial}{\partial x}(Y-Y_0)&=0\end{aligned}\right\}\quad(46\text{a})$$

Ferner folgt aus unseren beiden Systemen von Lösungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\varepsilon}{4\pi}(X-X_0)\right\}+\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{\varepsilon}{4\pi}(Y-Y_0)\right\}&\\ +\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\varepsilon}{4\pi}(Z-Z_0)\right\}&=0\end{aligned}\right\}\quad(45\text{b})$$

Aus den vier letzten Gleichungen (46a) und (45b) geht aber hervor: Wenn wir zwei Systeme von Lösungen dieser Differentialgleichungen haben, X, Y, Z und X_0, Y_0, Z_0, so sind die Differenzen dieser Lösungen, $X-X_0$, $Y-Y_0$, $Z-Z_0$, Lösungen derselben Differentialgleichungen, falls wir die in diesen als gegeben betrachteten Functionen gleich Null setzen.

Für dieses System von Differentialgleichungen (46a) und (45b) läfst sich nun eine allgemeine Lösung geben. Wenn nämlich zwischen

drei von einander unabhängigen veränderlichen Gröfsen ein Gleichungssystem von der Form unserer Gleichungen (46 a) besteht, so wird es immer erfüllt werden können, wenn man

$$\left.\begin{aligned} X - X_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ Y - Y_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ Z - Z_0 &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

und

setzt, wo φ irgend eine willkürliche Function der Coordinaten bezeichnet, von der nur vorausgesetzt ist, dafs ihre ersten und zweiten Differentialquotienten endliche Werthe haben. Wenn wir jene Annahme machen, so würden die Gleichungen (46a) nunmehr lauten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (46\,\text{b})$$

Diese Gleichungen sind richtig, sobald die unabhängigen Variablen, x, y und z wirklich von einander unabhängig sind. Die Gleichung (45 b) würde noch eine weitere Bestimmung der Function φ geben, indem sich dieselbe umformt in:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = 0 \quad (45\,\text{c})$$

Um die Gleichungen ganz allgemein zu halten, haben wir bisher ε, die Constante für die dielektrische Polarisation, noch als Function der Coordinaten betrachtet. Darin war die Annahme enthalten, dafs der Raum mit Substanzen gefüllt ist, welche an verschiedenen Stellen verschiedene dielektrische Polarisationsfähigkeit haben. Wenn wir uns nun auf einen Theil des Raumes beschränken, in welchem die Substanz gleichartig ist, so dafs wir also ε als constant betrachten können, so verwandelt sich die Gleichung (45 c) in

$$\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\Delta\varphi = 0$$

oder

$$\Delta\varphi = 0 \quad (48)$$

womit eine nähere Bestimmung der Function φ gegeben ist.

Dieses ist nun eine Gleichung, die in der Theorie der Potentialfunctionen von grofser Bedeutung ist.

Die verschiedenen Lösungen, welche den aufgestellten vier Differentialgleichungen (46a) und (45b) entsprechen, können sich nun von einander wiederum nur durch Werthe unterscheiden, welche Lösungen derselben Differentialgleichungen sind, d. h. derjenigen Differentialgleichungen, welche aus den ursprünglichen dadurch erhalten werden, dafs die in ihnen vorkommenden Functionen, durch welche sie nicht homogen sind, gleich Null gesetzt werden.

Um auf eine weitere Eigenschaft dieser Gleichungen hinzuweisen, wollen wir sie zunächst in ihrer Schreibweise vereinfachen, indem wir X, Y, Z statt $X - X_0$, $Y - Y_0$, $Z - Z_0$ setzen und somit erhalten

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{46c}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}.X\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}.Y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\varepsilon}{4\pi}.Z\right) = 0 \tag{45d}$$

Die Summe und die Differenz je zweier Lösungen dieser Gleichungen sind ebenfalls wieder Lösungen, weil nach unserer vorigen Darlegung zwei verschiedene Lösungen sich nur durch Lösungen dieses Gleichungssystems selbst unterscheiden können. Da wir somit jede Lösung zu sich selbst beliebige Male addiren können, so folgt daraus, dafs jede Lösung, also z. B. X_1, Y_1, Z_1, die als bestimmte Function der Zeit und der Coordinaten gefunden ist, auch eine richtige Lösung bleibt, wenn wir sie mit irgend einem Coefficienten multipliciren. Ebenso können wir sie aber auch zu irgend einer anderen Lösung addiren, die vorher aber ebenfalls mit irgend einem constanten Coefficienten multiplicirt sein darf, so dafs also, wenn X_1, Y_1, Z_1, und X_2, Y_2, Z_2 Lösungen sind, auch

$$a.X_1 + b.X_2$$

und

$$a.Y_1 + b.Y_2$$

$$a.Z_1 + b.Z_2$$

Lösungen sind, welche Werthe die Constanten a und b auch haben mögen.

Wenn ein System von Gleichungen, das zur Lösung eines physikalischen Problems aufgestellt ist, solche Beschaffenheit hat, daſs jede homogene lineare Function der für die verschiedenartigen Gröſsen gefundenen Werthe wieder ein den Gleichungen entsprechendes System von Werthen darstellt, so sagt man, die physikalischen Vorgänge, welche den verschiedenen Lösungen entsprechen, seien superponirbar.

In manchen Fällen läſst die sinnliche Anschauung direct die Superposition und das ungestörte Fortbestehen der einzelnen Glieder der Summe erkennen. So können z. B. verschiedene Wellensysteme auf einer Wasseroberfläche oder verschiedene Schallwellensysteme in der Luft gleichzeitig neben einander bestehen, ohne daſs die Systeme sich gegenseitig in ihrem Verlaufe stören.

Das ist eine sehr wesentliche Eigenschaft aller derjenigen physikalischen Processe, welche durch lineare homogene Differentialgleichungen dargestellt werden können.

Die bei der Superposition benutzten Coefficienten a und b können auch imaginär sein. Wenn wir etwa b durch den imaginären Coefficienten $b.i$ ersetzen, so wird dadurch weiter nichts angezeigt, als daſs der reelle Theil der gebildeten algebraischen Summe eine Lösung sein muſs, und der imaginäre ebenfalls. Wir kommen darauf später noch zurück, und werden davon gerade bei den Lichtschwingungen Gebrauch machen.

Wenn wir also Lösungen dieses einfacheren homogenen Systems und ferner eine Lösung der vollständigen nicht homogenen Differentialgleichungen gefunden haben, so können wir alle weiteren Lösungen des ursprünglichen Systems daraus herleiten, indem wir zu der einen gefundenen Lösung desselben die verschiedenen Lösungen des einfacheren Systems addiren.

Wir wollen nunmehr zunächst sehen, wie wir eine solche erhalten können.

§ 16. Reduction der Maxwell'schen Gleichungen auf die Form: $\Delta \varphi = -4\pi F_{(x, y, z)}$.

Um Lösungen der ursprünglichen Maxwell'schen Grundgleichungen zu finden, ist es bequemer, wenn wir in die Gleichungen (31) die Momente selbst aus den Gleichungen (32) einfügen, so daſs wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)\\
A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)\\
A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (49)$$

Dazu kommt dann noch die weitere Gleichung

$$\sigma = \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}.$$

Aus diesen vier Differentialgleichungen müssen wir die Werthe der Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ zu finden suchen. Obschon dieses Gleichungssystem ziemlich complicirt ist, so sind doch ausgebildete Methoden vorhanden, seine Lösung durchzuführen.

Wir haben zu diesem Zwecke die zu bestimmenden Gröfsen durch eine Reihe anderer Functionen darzustellen, und zwar durch vier neue Functionen von x, y, z, t, die mit U, V, W, ψ bezeichnet sein mögen. Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}\\
\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}\\
\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Da hier vier neue Functionen statt der drei zu bestimmenden eingeführt sind, so kann noch eine Bedingungsgleichung zwischen den neuen Functionen aufgestellt werden, und zwar wollen wir festsetzen, dafs

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (51)$$

sein soll.

Zunächst ist zu untersuchen, unter welchen Bedingungen sich gegebene Functionen der Coordinaten, wie es $\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)$, $\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)$ und $\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)$ sind, durch vier andere Functionen derselben Art, wie es U, V, W, ψ sind, unter Einhaltung der Gleichungen (50) und (51) darstellen lassen.

Nehmen wir zunächst an, die vier genannten Functionen U, V, W, ψ liefsen sich so bestimmen, dafs die Gleichungen (50) erfüllt seien, aber statt (51) ergäbe sich eine abweichende Gleichung, nämlich:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \chi$$

so würden wir an Stelle der drei Functionen U, V, W drei andere setzen können, die wir der Reihe nach bezeichnen wollen mit

$$U' = U - \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$V' = V - \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$W' = W - \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Es ist leicht zu sehen, dafs die Gleichungen (50) auch durch Einsetzen von U', V', W' statt U, V, W erfüllt bleiben, da

$$\begin{aligned}\frac{\partial V'}{\partial z} - \frac{\partial W'}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\end{aligned}$$

und ähnlich bei den übrigen.

Die Gleichung (51) aber nimmt die Form an

$$\frac{\partial U'}{\partial x} + \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial W'}{\partial z} = \chi - \Delta \varphi \tag{51 a}$$

Wenn sich also die Function φ so bestimmen läfst, dafs im ganzen Raume

$$\Delta \varphi = \chi \tag{51 b}$$

wird, so würden U', V', W' Functionen sein, die statt U, V, W gesetzt, nicht bloss die Gleichungen (50), sondern auch (51) erfüllen. Wie Gleichung (51 b) zu lösen ist, werden wir weiter unten erörtern.

Damit ist der erforderliche Nachweis geführt, dafs, wenn wir irgend welche Functionen U, V, W, ψ finden können, die den Gleichungen (50) genügen, auch solche Functionen sich finden lassen, die gleichzeitig auch (51) erfüllen. Um nunmehr auch die Gleichungen (50) zu erfüllen, differentiiren wir die erste dieser Gleichungen nach

x, die zweite nach y, die dritte nach z und addiren, so verschwindet die Summe der beiden ersten Glieder rechts, und wir erhalten:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\pi} \cdot \varDelta \psi \tag{52}$$

welches eine Gleichung derselben Form wie (51b) ist, und woraus man durch dieselbe unten zu besprechende Methode ψ finden kann, wenn $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, ε bekannt sind. Wir setzen nunmehr die Werthe für $\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}$, $\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}$ und $\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}$ aus (50) in unsere Gleichungen (49) ein, so ergiebt sich zunächst für die erste derselben:

$$A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial y} + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z}$$
$$= -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z}$$
$$= -\varDelta U + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right).$$

Nun war: $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$ und daher wird:

$$A\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = -\varDelta U$$

Die zweite Gleichung giebt ganz analog

$$A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = -\varDelta V \tag{53}$$

und die dritte Gleichung

$$A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = -\varDelta W$$

Wir sind also auf Differentialgleichungen von der Form gekommen, dafs eine als bekannt vorausgesetzte gegebene Function gleich gesetzt wird der Summe der drei zweiten Differentialquotienten nach den Coordinaten von einer der eingeführten Hilfsfunctionen U, V, W. Wenn in Gleichung (52) der Werth von ε constant ist, so erhält diese die Form:

$$\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \varDelta \psi. \tag{52a}$$

Die auf der linken Seite in der Klammer stehende Gröfse ist nun eine Function, die wir schon kennen gelernt und mit σ bezeichnet haben. Sobald also der Werth von ε in dem Raume oder einem Theile des Raumes constant ist, kommen wir auch hier auf dieselbe Form der Gleichung, nämlich auf

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = -\frac{1}{4\pi}.\Delta\psi \tag{52b}$$

so dafs also dann die volle Lösung unserer Gleichungen (49) für Räume mit constantem Werth des ε gefunden werden kann, wenn wir Gleichungen der Form

$$\Delta\varphi = -4\pi.F_{(x,y,z)} \tag{54}$$

zu lösen vermögen, wo φ die zu findende Function, und $F_{(x,y,z)}$ eine gegebene Function der Coordinaten ist. Es mag hier gleich bemerkt sein, dafs die wegen der Constanz des ε zu machende Einschränkung bei den in diesem Bande zu behandelnden optischen Aufgaben kein Hindernifs abgiebt.

Die Gleichung (54) ist eine sehr viel behandelte Differentialgleichung, da sie die Grundgleichung der sogenannten Potentialfunctionen bildet. Sie kommt in der Theorie der Gravitation, des Magnetismus und der Elektrostatik unzählige Male vor, und auf ihrer Lösung beruht die Lösung des gröfsten Theiles der mathematisch-physikalischen Probleme.

In der That lassen sich für solche Differentialgleichungen dann immer vollständige Lösungen finden, wenn sie sich auf Functionen beziehen, deren Werth in der Ausdehnung des ganzen unendlichen Raumes gefunden werden soll, und von denen man weifs, dafs sie in der Unendlichkeit verschwindend klein werden, und zwar hierbei in der Art abnehmen, wie der Werth einer durch die Entfernung vom Mittelpunkte des Coordinatensystems dividirten Constante.

Falls aber für das Innere begrenzter Räume die Lösungen zu suchen sind, z. B. wenn wir die Vertheilung des Magnetismus oder der Elektricität innerhalb oder aufserhalb von leitenden Körpern finden wollen, so treten leider oft Schwierigkeiten in der Anpassung der allgemeinen Form der Lösung an die besonderen Grenzbedingungen des behandelten Falles ein. Es ist aber festzuhalten, dafs nur die Grenzbedingungen es sind, welche Schwierigkeiten machen, und dafs die allgemeinen Lösungen, welche für den unbegrenzten Raum gelten, meist einfach zu finden sind.

Indem wir also die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen auf diese Grundgleichung der Potentialfunction zurückgeführt haben,

ist in Bezug auf die wirkliche Lösung der Gleichungen schon ein grofser Fortschritt gemacht. Ehe wir aber die Lösung selbst weiter ausführen, müssen wir wenigstens einige Sätze aus der Lehre von den Potentialfunctionen kennen lernen.

Zweiter Abschnitt.

Hülfssätze aus der Lehre von den Potentialfunctionen.

§ 17. Die Gleichung $\Delta\varphi = 0$.

Die einfachste Form der Gleichung (54)

$$\Delta\varphi = -4\pi . F_{(x,y,z)}$$

erhalten wir durch die Annahme

$$F_{(x,y,z)} = 0$$

so dafs dann also

$$\Delta\varphi = 0 \tag{55}$$

Für diese vielfach vorkommende Gleichung giebt es eine Reihe von sehr einfachen Lösungen. Wenn wir nämlich φ gleich einer constanten Masse m dividirt durch die von einem festen Punkte gerechnete Entfernung r, also

$$\varphi = \frac{m}{r} \tag{56}$$

setzen, so ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{m}{r^2} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

Sind nun ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes, von dem aus r gerechnet wird, so ist

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

also

$$r . \frac{\partial r}{\partial x} = x - \xi$$

Dann ergiebt sich

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{m}{r^2} . \frac{x-\xi}{r} \tag{56a}$$

$$= -\frac{m}{r^3}(x-\xi)$$

und ferner

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -\frac{m}{r^3} + \frac{3\,m}{r^4}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\cdot(x-\xi)$$

$$= -\frac{m}{r^3} + \frac{3\,m}{r^5}\cdot(x-\xi)^2 \qquad (56\text{b})$$

In analoger Weise können wir die Werthe von $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ und $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$ bilden. Indem wir nun diese drei Differentialquotienten addiren, erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned}\Delta\varphi &= -\frac{3\,m}{r^3} + \frac{3\,m}{r^5}\cdot[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2] \\ &= -\frac{3\,m}{r^3} + \frac{3\,m}{r^5}\cdot r^2 \\ &= -\frac{3\,m}{r^3} + \frac{3\,m}{r^3} \\ &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (56\text{c})$$

Hierbei ist aber zu beachten, dafs in dem Punkte, von dem aus r gerechnet wird, in welchem sich also die Masse m befindet, die Erfüllung der Gleichung zweifelhaft ist, indem dort

$$\Delta\varphi = \infty - \infty$$

ist. In allen anderen Punkten des Raumes ist aber der angegebene Werth von φ eine völlig einwurfsfreie Lösung für diese Gleichung.

Wenn wir also nur für einen Theil des Raumes diese Gleichung zu lösen haben, so werden wir nach dem Principe der Superposition, da die zu Grunde liegende Differentialgleichung homogen und linear ist, auch das φ als eine Summe von verschiedenen ähnlich gebildeten Ausdrücken ansetzen können:

$$\varphi = \sum \frac{m_a}{r_a} \qquad (57)$$

Nur müssen dann die Massen m_a alle aufserhalb desjenigen Raumes liegen, für welchen wir die Gleichung (55) erfüllen wollen. Für einen beschränkten Raum ist demnach die Möglichkeit gegeben, eine unendliche Anzahl von Lösungen zu finden, welche alle der Differentialgleichung $\Delta\varphi = 0$ genügen.

Es ist noch zu bemerken, dafs wir unter m_a ebenso gut elektrische oder magnetische Quanta als ponderable Massen verstehen können.

§ 18. Die Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi . F_{(x,\, y,\, z)}$.

Man bezeichnet im Allgemeinen die Function φ, welche der Gleichung (54)

$$\Delta\varphi = -4\pi . F_{(x,\, y,\, z)}$$

genügt, als die Potentialfunction der gegebenen Dichtigkeit $F_{(x,\, y,\, z)}$. Es zeigt sich nämlich, dafs die Potentialfunctionen von gravitirenden Massen oder ruhenden elektrischen Quantis, beziehlich ruhenden magnetischen Quantis, auch dieser Differentialgleichung genügen, und dafs hierbei der Werth von $F_{(x,\, y,\, z)}$ bald die Dichtigkeit der ponderablen Massen, bald die Dichtigkeit der ruhenden Elektricität, bald die Dichtigkeit des ruhenden Magnetismus, welche in dem bestimmten Raume vorhanden ist, oder welche man sich in ihm als vorhanden denkt, darstellt. In unserer Gleichung (52) ist also demnach ψ eine Potentialfunction von der Dichtigkeit

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)$$

und durch die Gleichungen (53) sind die Functionen U, V, W ebenfalls charakterisirt als Potentialfunctionen von bestimmten Dichtigkeiten, und zwar sind diese Dichtigkeiten die mit $\frac{A}{4\pi}$ multiplicirten Differentialquotienten nach der Zeit von den magnetischen Momenten, d. h. sie entsprechen den Componenten bestimmter magnetischer Aenderungen oder, wie wir auch sagen können, magnetischer Ströme, die in der Substanz vorkommen, wenn die Intensität des Magnetismus sich in ihr ändert. Man pflegt diese Potentialfunctionen, U, V, W, neuerdings — namentlich geschieht dieses von den englischen Physikern — als Vector-Potentiale zu bezeichnen, weil sie Potentialfunctionen von gerichteten Gröfsen sind, und als solche sich selbst auf eine bestimmte Richtung beziehen. $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und auch die Resultante derselben bezeichnet man in der Sprache der Quaternionen als Vectoren. Hier sind also von den Aenderungen der Componenten eines solchen Vectors die Potentialfunctionen gebildet worden.

Es kommen also hier vor: Potentialfunctionen von elektrischen Dichtigkeiten und Potentialfunctionen von den Componenten magnetischer Ströme.

Bei den übrigen bisher nicht weiter berücksichtigten Maxwell'schen Gleichungen, wo die Rollen der magnetischen und elektrischen

Momente sich vertauschen, bestehen ganz analoge Verhältnisse; man hat dann Potentialfunctionen von magnetischen Dichtigkeiten und Potentialfunctionen von den Componenten elektrischer Ströme.

§ 19. Die Potentialfunction einer mit Masse belegten Kugelschale.

Bei der Potentialfunction einer mit constanter Dichtigkeit gefüllten Kugel hat $\Delta \varphi$ einen von Null verschiedenen endlichen Werth.

Um eine solche Potentialfunction zu bilden, wollen wir ausgehen von der Potentialfunction einer mit constanter Dichtigkeit belegten Kugelfläche vom Radius R, von der wir voraussetzen, dafs auf ihr in jeder Flächeneinheit das gleiche Quantum anziehender oder abstofsender Substanz e ausgebreitet ist. Die Potentialfunction auf einen

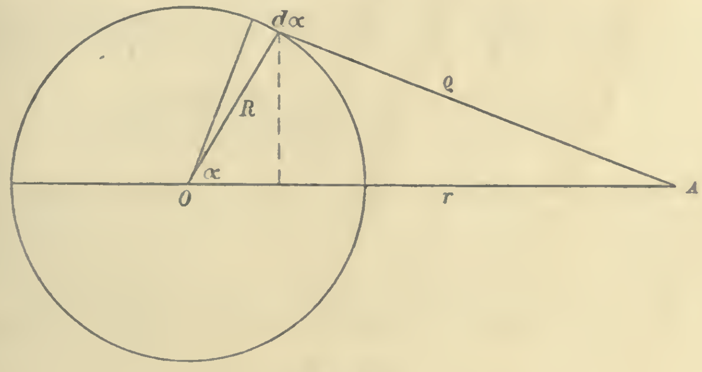


Fig. 14.

äufseren Punkt ergiebt sich, indem wir für alle Flächenelemente $d\omega$ der Kugelschale den Werth $\frac{e.d\omega}{\varrho}$ bilden, d. h. die Masse auf dem Flächenelement $d\omega$ der Kugelschale, durch ihre Entfernung ϱ von dem Punkte (x, y, z), für den wir die Potentialfunction finden wollen, dividiren und die so erhaltenen Werthe dann summiren. In dem vorliegenden Falle ist diese Summe ein Integral. Um dasselbe zu bilden, ziehen wir die Centrallinie von dem Mittelpunkte O der Kugel (Fig. 14) zu dem Punkt (x, y, z), den wir mit A bezeichnen wollen, und der je nach Umständen aufserhalb oder innerhalb der Kugelschale liegen kann.

Um ein Flächenelement der Kugelschale abzugrenzen, denken wir uns auf der Kugel ein System von Parallelkreisen construirt, dessen Axe mit der Centrallinie OA zusammenfällt. Sämmtliche Punkte eines jeden solchen Kreises haben dann die gleiche Poldistanz α von AO und den gleichen Werth von ϱ. Der Radius der

Kugel sei R, und mit r werde die Entfernung OA zwischen dem Mittelpunkte der Kugel und dem Punkte x, y, z bezeichnet.

Bei der Integration können wir gleich alle Flächenelemente zusammenfassen, die demselben zonenförmigen Ring der Kugeloberfläche angehören, der zwischen zwei der erwähnten Parallelkreise mit den Polabständen α und $\alpha + d\alpha$ liegen, da diese alle gleiche Werthe des Nenners ϱ haben. Die Länge, d. h. der Umfang dieses ringförmigen Abschnittes ist dann gleich $2\pi R . \sin\alpha$ und seine Breite gleich $R . d\alpha$, demnach seine Oberfläche gleich $2\pi R^2 . \sin\alpha . d\alpha$. Da die auf der Flächeneinheit liegende Masse mit e bezeichnet ist, so haben wir also für die Masse dieses Flächenelementes $2\pi e R^2 . \sin\alpha . d\alpha$. Nun ist die für alle Theile dieser Zone gleiche Entfernung ϱ vom Punkte A

$$\varrho = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr . \cos\alpha}$$

und wir erhalten also für das Potential dieser Zone im Punkte A den Werth

$$\frac{2\pi e R^2 . \sin\alpha . d\alpha}{\varrho} = \frac{2\pi e R^2 . \sin\alpha . d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr . \cos\alpha}}$$

Dieses ist nun über die ganze Kugel zu integriren, wobei also α die Integrationsvariable ist. Indem α von 0 bis π wächst, kommen nach einander alle Ringe, welche durch die verschiedenen Parallelkreise auf der Kugel abgeschnitten werden, in das Integral hinein, und wir erhalten als Potential der gesammten Kugelschale im Punkte A

$$\varphi = \int_0^\pi \frac{2\pi e R^2 \sin\alpha . d\alpha}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2R . r . \cos\alpha}} \tag{58}$$

Um dieses Integral auszuführen, können wir dasselbe umformen in:

$$\varphi = \int^\pi \frac{\pi e R}{r} . \frac{d(-2R . r \cos\alpha)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2R . r . \cos\alpha}} \tag{58a}$$

Da nun

$$\frac{dx}{\sqrt{a + x}} = d\left(2\sqrt{a + x}\right)$$

ist, so erhalten wir hier als Werth des unbestimmten Integrales

$$2\frac{\pi . e R}{r} . \sqrt{R^2 + r^2 - 2R . r . \cos\alpha}$$

Um den Werth des bestimmten Integrales zu erhalten, haben wir für diesen Ausdruck die Differenz zwischen den Grenzen zu nehmen.

Wir wollen dieses hier und fernerhin stets dadurch bezeichnen, dafs wir den Ausdruck zwischen zwei horizontalen Strichen einschliefsen, so dafs also

$$\varphi = \overline{\underline{\frac{2\pi e R}{r} \cdot \sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R.r.\cos\alpha}}} \tag{58b}$$

Für $\alpha = \pi$ ist nun

$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R.r.\cos\alpha} &= \sqrt{R^2 + r^2 + 2\,R.r} \\ &= \pm(R + r) \end{aligned}$$

und für $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R.r.\cos\alpha} &= \sqrt{R^2 + r^2 - 2\,R.r} \\ &= \pm(R - r). \end{aligned}$$

Welche von diesen Vorzeichen wir aber zu nehmen haben, bestimmt sich durch den Umstand, dafs ϱ die Entfernung zweier reeller Punkte im Raume bedeutet, d. h. also immer einen positiven Werth haben mufs. Für $(R + r)$ ist also jedenfalls das positive Zeichen zu nehmen, und für $\pm(R - r)$ immer das Zeichen, welches den Werth positiv macht, d. h. $(r - R)$, wenn A aufserhalb der Kugel liegt, dagegen $(R - r)$, wenn A in ihr liegt.

1. Der Punkt A befindet sich aufserhalb der Kugel.

Die entsprechende Potentialfunction nennen wir φ_a. An der oberen Grenze, d. h. für $\alpha = \pi$ liegt dann das betreffende Oberflächenelement an dem dem Punkte A abgewandten Pole; seine Entfernung ϱ von A ist daher

$$\varrho = R + r$$

An der unteren Grenze, d. h. für $\alpha = 0$ liegt aber das Flächenelement an dem zugewandten Pole, und es ist daher hier die Entfernung

$$\varrho = r - R$$

Setzen wir diese Grenzen ein, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \frac{2\pi e R}{r}[r + R - (r - R)] \\ &= \frac{4\pi R^2 . e}{r} \end{aligned} \tag{59}$$

Nun ist aber $4\pi R^2$ gleich der Oberfläche der Kugel, und diese multiplicirt mit der Dichtigkeit der Flächenbelegung giebt das ge-

sammte Massenquantum $4\pi R^2 . e$, welches auf ihr vorhanden ist. Die Potentialfunction einer solchen mit gleichmäfsiger Dichtigkeit belegten Kugelschale ist also ebenso grofs, als wenn die ganze Masse, welche auf der Oberfläche vertheilt ist, im Mittelpunkte der Kugel vereinigt wäre.

2. Liegt der Punkt A im Innern der Kugel,

so haben wir andere Werthe für die Grenzen des Integrals. Für $\alpha = \pi$ wird auch hier (Fig. 15)

$$\varrho = r + R$$

jedoch haben wir für $\alpha = 0$ nunmehr

$$\varrho = R - r$$

Setzen wir diese Werthe ein, so ergiebt sich für die hier mit φ_i bezeichnete Potentialfunction

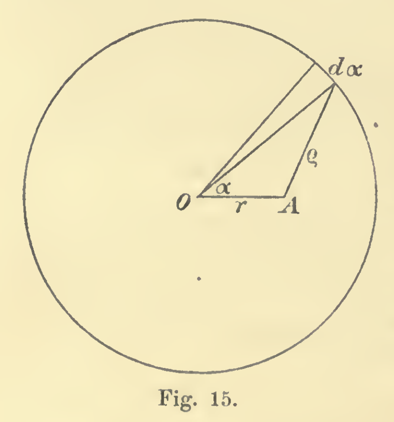


Fig. 15.

$$\varphi_i = \frac{2\pi e R}{r}[r + R - (R - r)]$$

$$= 4\pi e R \tag{60}$$

Die Potentialfunction φ_i ist also im ganzen Inneren der Kugel constant.

An der Oberfläche, wo $r = R$ wird, bekommen wir für die äufsere Potentialfunction φ_a genau denselben Werth, der für alle inneren Punkte gilt, nämlich

$$(\varphi_a)_{r=R} = 4\pi e R, \tag{61}$$

so dafs also die Werthe beider Potentialfunctionen in der Kugelfläche continuirlich in einander übergehen.

Das vorliegende Problem ist insoweit sehr lehrreich, als daraus hervorgeht, dafs eine solche einfache Flächenschicht, wie sie hier auf der Kugeloberfläche liegt, erstens ein endliches Potential hat, trotzdem der Nenner ϱ für einzelne Punkte der Oberfläche gleich Null wird und zweitens, dafs die Potentialfunction selbst an einer solchen mit einer einfachen Schicht von endlicher Dichtigkeit belegten Fläche keinen Sprung macht, sondern continuirlich durch sie hindurch geht.

Anders ist es mit den Differentialquotienten nach einer Normale der Oberfläche, also nach r. Diese sind:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial r} = 0 \tag{62}$$

und

$$\frac{\partial \varphi_a}{\partial r} = -\frac{4\pi R^2 e}{r^2} \tag{63}$$

An der Fläche selbst, wo $r = R$ ist, hat der Differentialquotient $\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}$ den Werth

$$\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\right)_{r=R} = -4\pi e \tag{64}$$

Der Differentialquotient nach der äufseren Normale ist also auf der äufseren Seite der Kugel abhängig von der Dichtigkeit der Masse auf der Kugel; auf der inneren Seite ist er aber gleich Null, und es ist demnach ein Sprung im Betrage von $-4\pi e$ in dem Werth des Differentialquotienten der Potentialfunction an der Kugeloberfläche vorhanden. Da die Differentialquotienten die Kräfte darstellen, so haben also auch diese keinen continuirlichen Verlauf.

Es mag hier noch bemerkt sein, dafs die wesentlichen Ergebnisse dieser für eine gleichmäfsig belegte Kugel angestellten Betrachtungen, dafs nämlich die Potentialfunction an einer Flächenschicht auf beiden Seiten gleichen Werth hat, und, wenn die Dichtigkeit der Schicht endlich ist, auch endlich ist, und dafs der Differentialquotient nach der Normale einen endlichen Sprung an der Flächenschicht macht, nicht blofs für eine solche Kugel gelten, sondern ganz allgemein für Flächen mit continuirlicher Krümmung, welche mit einer einfachen Flächenschicht belegt sind.

§ 20. Die Potentialfunction einer Vollkugel mit constanter Massendichtigkeit.

Die gefundenen Werthe von φ_i und φ_a können wir auch benutzen, um bei einer Vertheilung von endlicher Dichtigkeit durch die ganze Kugel die Potentialfunction für einen äufseren und inneren Punkt zu bestimmen.

Wir gehen hierbei von dem einfachsten Falle aus, indem wir annehmen, dafs die ganze Kugel mit gleichmäfsiger Dichtigkeit erfüllt ist.

Für einen äufseren Punkt wird die Berechnung sehr einfach, wenn wir uns die Kugel in eine Reihe von concentrischen Schalen zerlegt denken. Es hat dann jede dieser Schalen gleiche Dichtigkeit und wird daher nach aufsen hin eine Potentialfunction hervor-

bringen, welche ebenso grofs ist, als wenn die ganze Masse dieser Schale in dem Mittelpunkt vereinigt wäre. Das wird sogar der Fall sein, wenn die verschiedenen concentrischen Kugelschalen nicht alle dieselbe Dichtigkeit haben.

Im Falle der von uns angenommenen gleichmäfsigen Dichtigkeit erhalten wir für das Potential φ_a somit

$$\varphi_a = \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{R^3 \varepsilon}{r} \tag{65}$$

worin ε die constante Dichtigkeit im Innern der Kugel bezeichnet. Denn der Inhalt der Kugel ist gleich $\frac{4}{3}\pi R^3$, ihre Gesammtmasse erhalten wir durch Multiplication mit ε und, um die Potentialfunction für den Punkt A zu bilden, ist dann noch durch seine Entfernung r vom Mittelpunkte der Kugel zu dividiren.

An der Oberfläche der Kugel, wo also $r = R$ ist, erhalten wir

$$(\varphi_a)_{r=R} = \frac{4}{3}\pi R^2 \varepsilon \tag{65a}$$

Aus dieser Form der Potentialfunction (Gleichung 65), welche mit der im § 17 behandelten Form

$$\varphi = \frac{m}{r}$$

übereinstimmt, geht schon hervor, dafs $\Delta \varphi_a$ aufserhalb der Kugel überall gleich Null ist.

Für einen Punkt im Innern der Kugel wird die Sache dadurch verwickelter, dafs er für einen Theil der Kugelschichten ein äufserer Punkt ist, nämlich für alle diejenigen, welche einen kleineren Radius haben als r, während er für diejenigen Kugelschalen, deren Radius gröfser als r, ein innerer Punkt ist. Die Potentialfunction φ_i zerfällt demnach hier in zwei Theile. Bezeichnen wir die constante Dichte der Kugel wieder mit ε, so würde der erste Theil der Potentialfunction herrühren von einer Kugel vom Radius r, und daher den Werth

$$\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{r^3 \cdot \varepsilon}{r} = \frac{4\pi\varepsilon}{3} \cdot r^2$$

haben. Der zweite Theil bezieht sich auf die Kugelschalen, welche von dem betreffenden Punkte nach aufsen liegen. Das Potential dieser verschiedenen Kugelschalen hängt nun nur von ihrem Radius r ab; dieser aber ist für die hinter einander liegenden Kugelschalen verschieden, und wir haben daher das Integral dieser Werthe $4\pi r \varepsilon$

von r bis R, also $4\pi\varepsilon\int_r^R \mathfrak{r}\, d\mathfrak{r}$, zu nehmen. Das Gesammtpotential ist demnach:

$$\varphi_i = \frac{4\pi\varepsilon}{3} r^2 + 4\pi\varepsilon \int_r^R \mathfrak{r} . d\mathfrak{r}$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon}{3} r^2 + 2\pi\varepsilon [R^2 - r^2]$$

$$= 2\pi\varepsilon R^2 - \frac{2\pi\varepsilon}{3} r^2 \tag{66}$$

An der Oberfläche der Kugel ist hierin r gleich R zu setzen, und es ergiebt sich also

$$(\varphi_i)_{r=R} = 2\pi\varepsilon R^2 - \frac{2}{3}\pi\varepsilon R^2$$

$$= \frac{4}{3}\pi\varepsilon R^2 \tag{67}$$

Das ist aber derselbe Werth, wie derjenige des äufseren Potentials an gleicher Stelle (Gleichung 65a). Beide gehen also continuirlich in einander über.

An der Oberfläche der Kugel ist ferner der Differentialquotient des äufseren Potentials:

$$\left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{4\pi}{3}\varepsilon . R \tag{68}$$

und derjenige des inneren Potentials:

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial r}\right)_{r=R} = -\frac{4\pi}{3}\varepsilon . R \tag{69}$$

so dafs also hier, trotzdem die Dichte an der Kugeloberfläche einen Sprung macht, doch der erste in Richtung des Radius genommene Differentialquotient continuirlich ist.

Wir haben oben (§ 17) gesehen, dafs bei einer Potentialfunction von der Form $\frac{m}{r}$ die Summe der zweiten Differentialquotienten gleich Null ist. Daher ist hier bei der Vollkugel

$$\Delta\varphi_a = 0 \tag{70}$$

Wenn wir $\Delta \varphi_i$ berechnen wollen, so formen wir am besten den erhaltenen Werth von φ_i (Gleichung 66) um in:

$$\varphi_i = 2\pi \varepsilon R^2 - \frac{2\pi\varepsilon}{3}(x^2 + y^2 + z^2)$$

indem wir den Anfangspunkt eines rechtwinkeligen Coordinatensystems in den Mittelpunkt der Kugel legen. Es ist dann der Theil von $\Delta \varphi_i$, welcher von dem ersten Gliede herrührt, gleich Null, während der zweite Theil, da

$$\Delta(x^2 + y^2 + z^2) = 6$$

ist, den Werth $-4\pi\varepsilon$ erhält. Es ist also

$$\Delta \varphi_i = -4\pi\varepsilon \tag{71}$$

Die Summe der drei zweiten Differentialquotienten macht also an der Kugeloberfläche einen Sprung. Ist demnach die Dichte der Vollkugel constant, so ist bei der Bildung von $\Delta \varphi_i$ der Werth von r ohne Einfluſs. Wir brauchen daher für den Mittelpunkt der Kugel, wo also $r = 0$, keine besondere Discussion anzustellen, und es bleibt auch für diesen Punkt der im ganzen Innern der Kugel gültige Werth $\Delta \varphi_i = -4\pi\varepsilon$ bestehen.

§ 21. Der Werth von $\Delta \varphi$ im Mittelpunkte einer Vollkugel, deren Dichtigkeit gleich ist dem Product einer Winkelfunction und einer Function des Radius.

In § 17 zeigte sich (Gleichung 56c), daſs ganz allgemein für jeden von Null verschiedenen Werth

$$\Delta \varphi = -\frac{3m}{r^3} + \frac{3m}{r^3}$$

wo r die Entfernung bezeichnet zwischen dem Punkte, auf den sich φ bezieht, und demjenigen, in dem sich die Masse m befindet. Nehmen wir nun an, daſs bei einer Vollkugel in jeder der um den Mittelpunkt concentrischen Kugelschalen die Dichte constant und zwar gleich einer Funktion des Radius dieser Schale, also gleich $f_{(r)}$ sei, so wird nach Einführung von Polarcoordinaten für eine solche Schale von der Dicke dr im Mittelpunkte der Kugel

$$\frac{dm}{r^3} = dr \int \frac{1}{r^3} \cdot r^2 \cdot f_{(r)} \cdot d\omega$$

$$= 4\pi \frac{f_{(r)} \cdot dr}{r} \tag{72}$$

Setzen wir hierin $f_{(r)}$ gleich einer Constanten, also

$$f_{(r)} = \varepsilon$$

so erhalten wir

$$\frac{dm}{r^3} = 4\pi\varepsilon\frac{dr}{r}$$

$$= 4\pi\varepsilon . d(\lg \text{nat} . r) \qquad (73)$$

Wenn nun das $\Delta\varphi$ für eine Kugelschale von endlicher Dicke gebildet werden soll, so ist dieser Ausdruck (Gleichung 73) über r zu integriren. Das Integral wird dann, wenn der innere Radius sich Null nähert, unendlich, so dafs man also auf diesem Wege für $\Delta\varphi$ als Differenz zweier unendlichen Gröfsen keinen bestimmten Werth erhält. Wir haben jedoch soeben in § 20 für diesen Fall bereits in anderer Ableitung einen bestimmten Werth gefunden, nämlich

$$\Delta\varphi = -4\pi\varepsilon .$$

Wenn dagegen

$$f_{(r)} = c . r^{\alpha}$$

ist, wo c und α zwei von Null verschiedene Constanten bezeichnen, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{dm}{r^3} &= 4\pi c\int\frac{dr}{r^{1-\alpha}}\\ &= 4\pi c . \frac{1}{\alpha} . (R^{\alpha} - r^{\alpha})\end{aligned}\right\} \qquad (74)$$

Ist α negativ, so würden wir für $r = 0$ für $\Delta\varphi$ wieder einen unbestimmten Werth

$$\Delta\varphi = \infty - \infty$$

haben, während für jeden positiven Werth von α im Punkte $r = 0$

$$\Delta\varphi = 0 - 0$$

wird. Es ist also im Mittelpunkt der Kugel $\Delta\varphi$ gleich Null für eine Dichtigkeitsvertheilung, bei der die Dichte der verschiedenen concentrischen Kugelschalen auszudrücken ist durch eine Function des Radius von der Form

$$f_{(r)} = c . r^{\alpha}$$

wenn

$$\alpha > 0$$

ist.

Dieselbe Betrachtung bleibt gültig, wenn nach den verschiedenen vom Mittelpunkt ausgehenden Richtungen das Gesetz der Dichtigkeitszunahme verschieden ist, vorausgesetzt nur, dafs für jeden einzelnen Radius für kleinste Werthe von r

$$f_{(r)} < c . r^{\alpha}$$

ist, und $\alpha > 0$. Dabei würden also α und c beliebige Functionen der Winkel sein können, durch welche man die Richtung von r

definirt, und doch der Werth von $\Delta\varphi$ im Mittelpunkt der Kugel eindeutig gleich Null werden.

Unter diesen Bedingungen ist die Dichtigkeit im Mittelpunkte der Kugel aber stets gleich Null, und die Beiträge in dem Werthe von $\Delta\varphi$, welche aus der unmittelbaren Nachbarschaft dieses Punktes herrühren, verschwinden vollständig.

Daraus folgt nun, dafs, wenn an einer bestimmten Stelle des Raumes die Dichtigkeit den endlichen Werth a hat, und in den benachbarten Theilen diese Dichtigkeit um einen Betrag wächst, der angezeigt werden kann durch das Product irgend einer Potenz des Radius mit positivem Exponenten α und einer Winkelfunction Γ, welche natürlich auch gleich einer Constanten sein darf, also wenn

$$f_{(r)} = a + r^{\alpha} . \Gamma$$

ist, wir doch den Werth von $\Delta\varphi$ an jener Stelle finden können. Wir haben dann gewissermafsen zwei superponirte Massenbelegungen des Raumes, eine mit der constanten Dichte a, und die zweite mit der variablen Dichte $r^{\alpha} . \Gamma$. Den Theil von $\Delta\varphi$, welcher von der ersten herrührt, haben wir im vorigen Paragraphen zu $-4\pi a$ bestimmt, und der zweite, von der veränderlichen Massenerfüllung herrührende, verschwindet, so dafs wir also in diesem Falle erhalten

$$\Delta\varphi = -4\pi a \tag{75}$$

In der Lehre von den Potentialfunctionen wird das hier berührte Problem allgemeiner und ausführlicher erörtert, und es werden dort die Convergenzbedingungen für die Potentialfunctionen und für $\Delta\varphi$ aufgesucht werden.

§ 22. Anwendung auf die Gleichung $\Delta\varphi = -4\pi . F_{(x,y,z)}$.

Um eine von den Differentialgleichungen zu lösen, die wir in § 16 abgeleitet hatten, und welche aussagten, dafs die Summe der zweiten Differentialquotienten der gesuchten Functionen nach den Coordinaten gleich irgend einer stets endlichen Function der Coordinaten ist, also Gleichungen von der Form

$$\Delta\varphi = -4\pi F_{(x,y,z)}$$

sind, genügt es, von der Function $F_{(x,y,z)}$ eine Potentialfunction über den ganzen Raum, für welchen die Function F gegeben ist, zu bilden, und wir können sogar, wenn der Raum begrenzt ist, aufserhalb dieses Raumes noch beliebige Vertheilungen der Dichtigkeit hinzunehmen.

Berechnen wir die Potentialfunction von diesen Dichtigkeiten, so mufs sie jener Differentialgleichung Genüge leisten.

Es ist noch zu beachten, dafs wir bei der Berechnung der Potentialfunctionen die Integrale, wenn sie für den unendlichen Raum gelten sollen, auch bis in unendliche Entfernung ausdehnen und also sicher sein müssen, dafs die Potentialfunctionen auch dann noch endliche Werthe behalten.

Wir führen wieder Polarcoordinaten ein und bezeichnen die Dichte jeder Kugelschale ebenso wie im vorigen Paragraphen mit $f_{(r)}$, dann ist die Masse einer Kugelschale von der Dicke dr gleich

$$4\pi . r^2 . f_{(r)} . dr$$

und die Potentialfunction im Mittelpunkt würde demnach sein

$$\varphi = 4\pi \int r . f_{(r)} . dr \tag{76}$$

Wenn wir nun also wiederum

$$f_{(r)} = c . r^n$$

setzen, wo n eine beliebige Constante und c eine beliebige Winkelfunction bezeichnet, die wir hier der Einfachheit halber, da sie für das Folgende ohne Bedeutung ist, wie eine Constante behandeln wollen, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= 4\pi c \int r^{1+n} . dr \\ &= \frac{4\pi c}{2+n} . \overline{\underline{r^{2+n}}} \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Damit dieser Werth für $r = \infty$ noch endlich bleibt, mufs $2 + n < 0$, also n negativ und seinem absoluten Betrage nach gröfser als 2 sein.

In unseren späteren Anwendungen haben wir es fast immer mit Wellen zu thun, die von einem bestimmten Punkte während endlicher Zeit ausgegangen sind. Sie brauchen unendliche Zeit, um die Unendlichkeit zu erreichen, und bis dahin ist in der Unendlichkeit noch Alles in Ruhe. Die Potentialfunction ist dabei von Werthen $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$ u. s. w. zu nehmen, die nur innerhalb des bisher von den Wellen durchlaufenen Raumes endlich von Null verschieden sind; dann bleibt sicher die Potentialfunction endlich.

Wenn diese aus Gleichung (77) folgenden Bedingungen für die Dichtigkeiten eingehalten sind, so können wir für den unendlichen Raum unsere Differentialgleichung immer lösen. Das Berechnen der Potentialfunction ist eine Operation, die nur die Aufsuchung

bestimmter Integrale erfordert, und die wir also immer ausführen können; wenn nicht durch analytische Formeln, so doch stets durch Quadraturen.

Damit ist nun die Möglichkeit gegeben, die Aufgabe, auf die wir gestofsen sind, wenigstens zunächst für den unbegrenzten Raum zu lösen und die gesuchten Potentialfunctionen zu finden, sobald diejenigen Functionen gegeben sind, welche wir als Dichtigkeiten zu berücksichtigen haben. Dieses waren aber einerseits die magnetischen Strömungen und andererseits die Function $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)$. Wenn die Dichtigkeit, für welche die Potentialfunction gesucht wird, im Innern eines geschlossenen Raumes gegeben ist, so können wir noch beliebige Vertheilungen in dem äufseren Raume hinzu setzen, ohne dafs die Summe der zweiten Differentialquotienten nach den Coordinaten in dem inneren Raum verändert wird; denn der von diesem herrührende Theil ist hier ja gleich Null. Ein solcher Zusatz wird nun bei einer grofsen Menge von Problemen dadurch nöthig, dafs an der Grenze des Raumes bestimmte Bedingungen für die Werthe der Potentialfunction und ihrer Differentialquotienten, die sogenannten Grenzbedingungen, zu erfüllen sind. Im Allgemeinen ist es viel schwieriger, diese Vertheilung im äufseren Raume auszuführen, als eine Reihe von Werthen für das Innere des Raumes zu finden, und die eigentliche Schwierigkeit der meisten Potentialaufgaben, auch der optischen Aufgaben, besteht darin, dafs die Erfüllung der Grenzbedingungen in vielen Fällen unmöglich ist. In einigen Fällen gelingt sie durch unendliche Reihen, deren Coefficienten sich durch besondere Methoden genau bestimmen lassen; oft genug ist man aber, um auch nur annähernd zum Ziele zu kommen, auf mehr oder weniger weitläufiges Probiren angewiesen.

Bei den Wellenbewegungen werden wir später ebenfalls auf eine allgemeine Differentialgleichung stofsen, die von sehr ähnlicher Form ist, wie die hier behandelte. Es kommt zwar noch die Zeit als weitere Variable hinein, aber in ähnlicher Form wie die Coordinaten.

Bevor wir jedoch an die Untersuchung dieser Gleichung herangehen, ist es nöthig, einen Hilfssatz, den sogenannten Green'schen Satz, zu erörtern, welcher in der Lehre von den Potentialfunctionen und auch von den Functionen, welche bei der Lichtbewegung vorkommen, vielfache Anwendung findet und eine grofse Menge sehr wichtiger Transformationen erleichtert.

§ 23. Der Green'sche Satz.

Dieser Satz wurde von G. Green, der in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts Professor in Cambridge war, zuerst aufgestellt und ist dann später hauptsächlich von Gauss zur Entwicklung der Lehre von den elektrischen Potentialfunctionen benutzt worden.

Der Green'sche Satz ist in Wirklichkeit nichts weiter, als die Anwendung der sogenannten partiellen Integration auf Gebilde von zwei oder drei Dimensionen, welche ringsum begrenzt sind, also auf begrenzte Flächen oder begrenzte Körpervolumina. Man mufs bei seiner Anwendung sorgfältig auf die verschiedenen Arten der Discontinuitäten achten, da diese hier von grofser Bedeutung sind. Deshalb wollen wir den Satz, obschon wir ihn bei den optischen Vorgängen nur in complicirterer Form benutzen werden, zunächst in einfacherer Form ableiten.

Wenn wir das Integral

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}(\varphi \cdot \psi) \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

über einen geschlossenen Raum zu bilden haben, so können wir in demselben die Integration nach x ausführen. Dadurch erhalten wir das unbestimmte Integral

$$\iint \varphi \cdot \psi \cdot dy \cdot dz$$

und, um das bestimmte Integral zwischen den festgesetzten Grenzen zu erhalten, mufs man die Differenz der Grenzwerthe bilden, welche durch Einsetzen des höchsten und des niedrigsten Werthes von x gewonnen werden. Indem wir dieses wiederum (vergl. § 19) durch zwei horizontale Striche, oben und unten, bezeichnen, ergiebt sich:

$$\iiint \frac{\partial}{\partial x}(\varphi \cdot \psi) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \overline{\underline{\iint \varphi \cdot \psi \cdot dy \cdot dz}} \tag{78}$$

Hierbei ändert sich in dem Integral nur der Werth von x, während y und z constant bleiben, weil nach ihnen nicht integrirt wird. Da $dy \cdot dz$ unverändert bleibt, so ist der Raum, über den hier integrirt wird, ein Prisma, dessen Axe der x-Axe parallel ist, während der Querschnitt desselben von der Fläche $dy \cdot dz$, also einem Rechteck oder Quadrat, dessen Seiten der y- und z-Axe parallel sind, gebildet wird.

Die Grenzwerthe, deren Differenz hier genommen werden mufs, sind die Producte der beiden Functionen φ und ψ an dem oberen

und unteren Ende, multiplicirt mit dem gemeinsamen Querschnitte $dy.dz$ des prismatischen Raumes. Ist nun dieser Raum durch das Element $d\omega$ einer gekrümmten Fläche begrenzt, so ist $dy.dz$ gleich der Projection von $d\omega$ auf die yz-Ebene, und es ist eine bekannte Regel, dafs, wenn Stücke einer Ebene auf eine andere Ebene projicirt werden, die Projection gleich ist dem projicirten Flächenstück multiplicirt mit dem Cosinus desjenigen Winkels, welchen beide Ebenen mit einander einschliefsen. Nun ist zwar das hier projicirte Flächenstück herausgenommen aus einer krummen Fläche; aber, da es unendlich klein, so können wir es als Stück einer Ebene betrachten. Der Winkel zwischen den beiden Flächen ist aber gleich dem Winkel, welchen ihre Lothe mit einander bilden. Das Loth auf der Projectionsebene ist parallel der x-Axe. Es ist hierbei vortheilhaft, dasjenige Loth der Fläche $d\omega$ zu nehmen, welches in den Raum hinein geht, über welchen wir die Integration ausführen, also die sogenannte innere Normale. Die äufsere Normale des Flächenstückes würde aus dem Raum heraus fallen, und da könnten möglicherweise die Werthe der Differentialquotienten ganz andere sein. Wir müssen also

$$d\omega \,.\, \cos a = dy \,.\, dz$$

setzen, worin a den Winkel bezeichnet, den die innere Normale des Flächenelementes $d\omega$ mit der steigenden x-Axe bildet. An dem oberen Ende des Prisma (vergl. die nebenstehende Figur 16) mufs dieser Winkel nothwendig ein stumpfer sein; denn wenn wir in der x-Axe aufsteigen, so mufs diese von innen her in das gegebene Endstück des Prisma eintreten, und es wird daher der Winkel zwischen der steigenden x-Axe und der inneren Normale gröfser als ein Rechter sein. Wollen wir also $dy.dz$ durch den Werth $\cos a.d\omega$ ersetzen, so wird $\cos a$ negativ zu nehmen sein, und wir

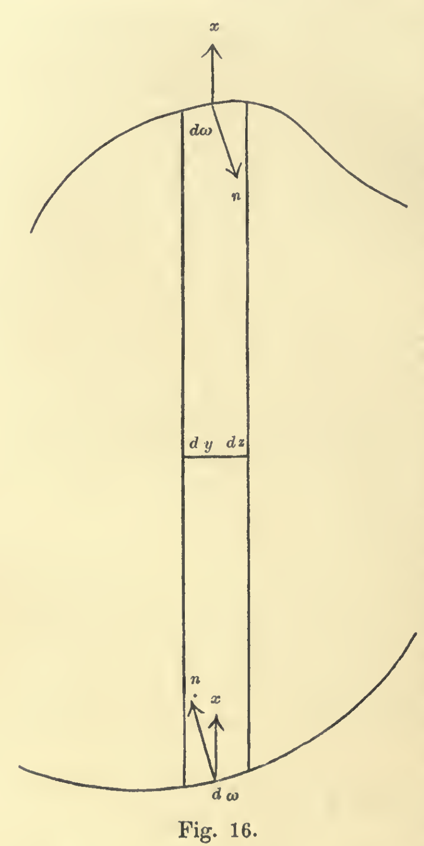


Fig. 16.

bekommen demnach für das obere Flächenelement $-\varphi.\psi.\cos a.d\omega$. Für die untere Grenze ist der Winkel zwischen der steigenden x-Axe und der inneren Normale nothwendig ein spitzer, der Cosinus also positiv; aber den Theil des Integrals, der sich auf diese untere Fläche bezieht, müssen wir abziehen; daher bekommt er ebenfalls das negative Vorzeichen.

Für beide Grenzen stellt also $-\varphi.\psi.\cos a.d\omega$ denjenigen Werth dar, der als Grenzwerth der Integration zu nehmen ist. Zu diesem einen Prisma kommen noch andere ähnliche Prismen, welche daneben liegen und zusammen schliefslich den ganzen Raum einnehmen, über den wir zu integriren haben, und deren Enden die ganze begrenzende Fläche für diesen Raum bilden. Dieses ändert sich auch nicht, wenn die Prismen mehrfach die Fläche schneiden sollten. Wir müfsten dann jedes Element einer Schnittfläche als ein Stück der Grenzfläche behandeln und da, wo die steigende x-Axe in den Raum eintritt, hatten wir eine untere Grenze, und wo sie wieder heraustritt, würde eine obere Grenze sein, so dafs sich zwar die Ausdrücke mehrfach wiederholen, aber die Grenzwerthe, welche man durch Ausführung dieser Integration über den ganzen Raum bekommt, würden in dieselbe Form aufgenommen werden können. Wir erhalten also stets

$$\overline{\underline{\iint \varphi.\psi.dy.dz = -\int \varphi.\psi.\cos a\,d\omega}} \tag{79}$$

Damit unser Integral $\iiint \frac{\partial}{\partial x}(\varphi.\psi).dx.dy.dz$ einen bestimmten Sinn hat, müssen die Differentialquotienten der beiden Functionen ψ und φ sich überall in dem Raum, über den die Integration ausgedehnt werden soll, bilden lassen, und einen bestimmten, und zwar eindeutig bestimmten endlichen Werth haben, beziehlich wenigstens nur in der Weise unendlich werden, dafs sie doch ein endliches Integral geben.

Indem wir die Differentiation unter dem Integralzeichen ausführen, können wir nunmehr schreiben:

$$\iiint \varphi.\frac{\partial \psi}{\partial x}.dx.dy.dz + \iiint \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x}.dx.dy.dz$$
$$= -\int \varphi.\psi.\cos a.d\omega \tag{80}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\iiint \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} . dx . dy . dz = -\iiint \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} . dx . dy . dz \\ -\int \varphi . \psi . \cos a . d\omega\end{aligned}\right\} \quad (80\text{a})$$

Dieses wäre die Umschreibung in die gewöhnliche Form der partiellen Integration. Bei ihr pflegen wir einen Factor zu haben, dessen Integration nicht direct ausführbar ist, einen zweiten, welcher als Differentialquotient geschrieben ist, und der also unmittelbar integrirt werden kann; wir bilden das Integral, das sich auf die Grenzen bezieht, und haben davon abzuziehen dasjenige Integral über denselben Raum genommen, bei welchem der integrirte Factor unverändert bleibt, während der andere Factor nach derjenigen Variabeln differentiirt wird, nach welcher wir vorher integrirt haben. Die Bedingungen für die Ausführbarkeit dieser Rechnungsweise bestehen hier darin, dafs die beiden Functionen, welche differentiirt werden sollen, eindeutig und differentiirbar sind, und Differentialquotienten geben, welche einen bestimmten Werth und Sinn haben und nicht an verschiedenen Stellen des Raumes theils negativ, theils positiv unendlich werden.

Zu dem hier behandelten Integrale können wir noch zwei andere, völlig analoge, hinzunehmen. Die erste, auf y bezügliche, analoge Gleichung lautet:

$$\left.\begin{aligned}\iiint \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} . dx . dy . dz = -\iiint \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} . dx . dy . dz \\ -\int \varphi . \psi . \cos b . d\omega\end{aligned}\right\} \quad (81)$$

worin der Winkel zwischen der aufsteigenden y-Axe und der Flächennormale mit b bezeichnet ist.

Eine dritte Gleichung läfst sich bezüglich der z-Coordinate ableiten, nämlich:

$$\left.\begin{aligned}\iiint \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} . dx . dy . dz = -\iiint \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} . dx . dy . dz \\ -\int \varphi . \psi . \cos c . d\omega\end{aligned}\right\} \quad (82)$$

Für die zweite und dritte Gleichung ist natürlich ebenso, wie für die erste Gleichung, vorauszusetzen, dafs die Functionen φ und ψ eindeutig und endlich sind, und eindeutige und endliche Differentialquotienten erster Ordnung haben.

Wir wollen nun die Form dieser drei Gleichungen (80a, 81 und 82) verändern, indem wir an Stelle von φ seine Differentialquotienten nach

den Coordinaten setzen, und zwar $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ in Gleichung (80a), $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ in Gleichung (81) und $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ in Gleichung (82), und dann die Gleichungen addiren; dann erhalten wir:

$$\int\!\!\int\!\!\int\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}\right]dx.dy.dz$$

$$= -\int\psi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos a+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos b+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos c\right)d\omega$$

$$-\int\!\!\int\!\!\int\psi\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)dx.dy.dz$$

$$\left.\begin{aligned} &= -\int\psi\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos a+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos b+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos c\right)d\omega \\ &\quad -\int\!\!\int\!\!\int\psi\,.\,\Delta\varphi\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz \end{aligned}\right\}(83)$$

Diese Umformung ist aber nur möglich, wenn die Function ψ im ganzen Raume für alle drei partiellen Integrationen eindeutig denselben Werth hat, und nicht nur die ersten Differentialquotienten der beiden Functionen φ und ψ, sondern auch die zweiten Differentialquotienten von φ einen bestimmten endlichen Werth haben oder wenigstens nur in der Weise unendlich werden, dafs sie doch endliche Integrale geben.

Die Klammer, welche die Differentialquotienten von φ nach den einzelnen Coordinatenrichtungen multiplicirt mit den Cosinus derjenigen Winkel, welche diese Coordinaten mit der inneren Normale n machen, enthält, ist gleich dem Differentialquotienten von φ, genommen in der Richtung der inneren Normale, also gleich $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Es kann also die Gleichung (83) auch geschrieben werden:

$$\int\!\!\int\!\!\int\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}\right].dx.dy.dz$$

$$= -\int\psi\frac{\partial \varphi}{\partial n}d\omega-\int\!\!\int\!\!\int\psi\Delta\varphi.dx.dy.dz \quad (83\text{a})$$

Da die linke Seite der Gleichung symmetrisch nach den beiden Functionen φ und ψ ist, so können wir die rechte Seite auch so schreiben, dafs die Differentialquotienten von φ integrirt werden, während ψ weiter differentiirt wird. So erhalten wir:

$$\iiint\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]dx.dy.dz$$

$$=-\int\varphi.\frac{\partial\psi}{\partial n}.d\omega-\iiint\varphi.\Delta\psi.dx.dy.dz \quad (84)$$

Diese zweite Umformung verlangt nun für ihre Gültigkeit, dafs nicht blofs die ersten Differentialquotienten beider Gröfsen eindeutig und endlich sind, sondern dafs beides auch gleichzeitig bei den zweiten Differentialquotienten von ψ der Fall ist.

Gleichzeitig gelten also beide Umformungen (83a) und (84) nur dann, wenn die zwei ersten Differentialquotienten von den beiden Functionen φ und ψ mit eindeutigem Sinne gebildet werden können und endlich oder wenigstens nur integrirbar unendlich sind.

Die linken Seiten der Gleichungen (83a) und (84) sind identisch; wir erhalten nun durch Gleichsetzen der rechten Seiten:

$$\int\varphi.\frac{\partial\psi}{\partial n}d\omega+\iiint\varphi.\Delta\psi.dx.dy.dz$$

$$=\int\psi.\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\omega+\iiint\psi.\Delta\varphi.dx.dy.dz \quad (85)$$

Die Anwendung dieser Gleichung hat für diejenigen Functionen, bei denen die Summe der zweiten Differentialquotienten nach den Coordinaten gleich Null ist, Vortheil, weil dann das Raumintegral verschwindet, also blofs das Flächenintegral stehen bleibt.

Wenn eine der Functionen φ oder ψ an irgend einer Fläche einen plötzlichen Sprung ihres Werthes macht, so dafs sie etwa auf der einen Seite den Werth φ_1 und auf der anderen Seite den Werth φ_2 hat, dann läfst sich an dieser Stelle kein eindeutiger Differentialquotient bilden; denn um ihn quer durch die Fläche hindurch zu bilden, müfsten wir den Werth auf der einen Seite nehmen, von ihm den auf der entgegengesetzten Seite abziehen, und diese Differenz durch die Entfernung dn zwischen den Orten dieser beiden Werthe dividiren. Wenn eine wirkliche Discontinuität stattfindet, sodafs also zwei verschiedene Werthe in einer Fläche ohne Uebergang zusammenstofsen, so würde $dn = 0$ werden können, während $d\varphi$ noch einen endlichen Werth hat. Wir würden also für einen Differentialquotienten, welcher durch die Fläche hindurch genommen ist, einen unendlichen Werth bekommen, oder vielmehr würde das Verhältnifs zwischen $d\varphi$ und dn gar keiner bestimmten Grenze sich nähern, sondern, wenn wir dn immer kleiner und kleiner machen, steigen bis unendlich. Wir können also in diesem

Falle keine ersten Differentialquotienten bilden, und eine solche Fläche darf demnach durch den betreffenden Raum nicht hindurch gehen. Wenn aber eine solche vorhanden ist, müssen wir sie selbst als eine Grenze betrachten und die Integration auf beiden Seiten nur bis an die Fläche ausdehnen. Dann kommt eine solche Fläche in das Flächenintegral hinein, ebenso wie die Grenzflächen des Raumes.

Ferner werden auch $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}$ und $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}$, wenn wir n durch die Fläche hindurch in derselben Richtung nehmen, ebensowenig einen Sprung machen dürfen, weil wir dann durch die Fläche hindurch keinen zweiten Differentialquotienten bilden könnten, wenigstens nicht in der Richtung der Normale.

Die Bedingung für die Möglichkeit der Anwendung des GREEN'schen Satzes ist demnach, dafs weder die Werthe der beiden Functionen φ und ψ selbst, noch deren erste Differentialquotienten an einer durch den Raum hindurch gehenden Fläche einen Sprung machen dürfen. Wenn ein solcher Sprung entweder bei den Functionen selbst oder den Differentialquotienten vorkommt, so müssen wir jene Fläche als Grenzfläche behandeln und an ihr dieselben Flächenintegrale bilden, welche sonst nur für die Grenzfläche zu bilden sind. Dabei würden wir, wenn wir z. B. die Differentialquotienten von ψ durch Integration aufheben, auf der einen Seite $\int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_1} \cdot d\omega$ bekommen, wo die Normale dieser Seite mit n_1 bezeichnet ist, und auf der anderen Seite $\int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \cdot d\omega$, wo für die zweite Seite der Index 2 benutzt ist. Beide Werthe erhalten für die Integration über den betreffenden Raum das negative Vorzeichen, und wir bekommen also für eine solche Fläche, welche auf beiden Seiten von Räumen begrenzt ist, über welche integrirt werden soll, den Werth $-\int \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \right) d\omega$. Die beiden Normalen sind hier in entgegengesetzter Richtung genommen. Wenn wir aber auf beiden Seiten nach derselben Richtung differentiiren, so würden wir bekommen $-\int \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \right) d\omega$. Die erste Form, $-\int \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \right) d\omega$, wo man also voraussetzt, dafs die Normale jedesmal in denjenigen Raum hinein gerichtet ist, für den die betreffenden Differentialquotienten gelten, ist diejenige, welche gewöhnlich benutzt wird. In der zweiten Form,

$$-\int \psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_2} \right) d\omega,$$

wo wir die Richtung des n festhalten, bezeichnet die Differenz $\frac{\partial \varphi}{\partial n_1} - \frac{\partial \varphi}{\partial n_2}$ den Sprung in dem Werthe dieses Differentialquotienten in der Richtung von n. Es ist also die Gröfse der Discontinuität, welche hier als Factor eintritt.

Bisher haben wir vorausgesetzt, dafs ψ auf beiden Seiten der Fläche gleichen Werth hat, aber der Differentialquotient $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ verschieden ist. Haben die Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ auf beiden Seiten gleiche, hingegen ψ verschiedene Werthe, so würde das Flächenintegral lauten

$$-\int (\psi_1 - \psi_2) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega,$$

wobei nun $\psi_1 - \psi_2$ den Sprung der Function ψ darstellt.

§ 24. Besondere Fälle und Anwendungen des Green'schen Satzes.

I. Wir wollen zunächst den Fall untersuchen, dafs ψ gleich einer Constanten, also

$$\psi = C$$

ist. Dann wird die linke Seite unserer Gleichung (83a) gleich Null und wir erhalten:

$$0 = -\int C \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega - \iiint C \cdot \Delta \varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{86}$$

Hier ist C gemeinsamer Factor aller Theile. Wenn er also nicht selbst gleich Null ist, sondern einen von Null verschiedenen Werth hat, so können wir dadurch dividiren, und es ergiebt sich

$$0 = -\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega - \iiint \Delta \varphi \cdot dx \cdot dy \cdot dz \tag{86a}$$

1. Daraus folgt zunächst, dafs wenn die Function φ der Gleichung $\Delta \varphi = 0$ genügt, d. h. also, eine Potentialfunction im Innern eines von anziehender Masse leeren Raumes ist, das Integral über $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, genommen über die ganze Oberfläche, immer gleich Null, also

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\omega = 0 \tag{87}$$

sein wird; d. h. also, wenn an einem Theile der Fläche $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ positive Werthe hat, so wird es an dem anderen Theil der Fläche negative Werthe haben müssen, weil positive und negative Werthe so vertheilt sein müssen, dafs sie sich in der ganzen Fläche gegenseitig aufheben. Bei einem geschlossenen Raum können also nur dann an allen Theilen der Oberfläche Kräfte vorkommen, welche in demselben Sinne zur Oberfläche gerichtet sind, wenn im Innern des Raumes Massen liegen.

2. Wenn wir $\Delta \varphi = - 4 \pi F_{(x,y,z)}$ setzen, worin also die vorige Annahme als specieller Fall enthalten ist, so bekommen wir:

$$0 = - \int \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\omega + 4\pi \iiint F . dx . dy . dz$$

oder

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega = 4\pi \iiint F . dx . dy . dz \tag{88}$$

Das Integral über die ganze Oberfläche eines solchen Raumes genommen, ist demnach, wie auch der Raum gestaltet ist, nothwendig gleich der mit 4π multiplicirten Quantität der gesammten anziehenden Masse, da F, wenigstens symbolisch, die Dichtigkeit bezeichnet. Eine solche Masse brauchte aber nur in einem Punkte dieses Raumes zu existiren, damit in gleichem Sinne gerichtete Kräfte an der ganzen Oberfläche des Raumes vorkommen können.

II. Nehmen wir andererseits an, dafs in Gleichung (83a) die beiden Functionen φ und ψ einander gleich sind, so ergiebt sich:

$$\iiint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right\} dx . dy . dz$$

$$= - \int \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega - \iiint \varphi . \Delta \varphi . dx . dy . dz \tag{89}$$

Ist nun φ eine Function, die im ganzen Innern des betreffenden Raumes der Bedingung $\Delta \varphi = 0$ genügt, dann fällt in dieser Gleichung (89) das zweite Integral der rechten Seite weg. Machen wir nun weiter die Annahme, dafs φ an der ganzen Oberfläche

des Raumes gleich Null sei, so wird auch das erste Integral dieser Seite fortfallen, und es ergiebt sich, dafs das Raumintegral, welches die linke Seite bildet, seinem Gesammtbetrage nach gleich Null sein mufs, so dafs demnach:

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] . dx . dy . dz = 0 \qquad (89\text{a})$$

wird. Nun ist dieses Integral aber über eine Summe von drei Quadraten genommen, und wenn wir wie bisher unter φ immer eine im ganzen Integrationsraume reelle Function verstehen, so sind die Differentialquotienten auch reell, die Quadrate also niemals negativ. Das Raumintegral kann also nur dann gleich Null werden, wenn an allen Stellen des gesammten Raumes, über den integrirt wird, sämmtliche drei nach den Coordinaten genommene Differentialquotienten gleich Null sind. Daraus folgt, dafs φ nothwendig eine constante Gröfse sein mufs, und zwar mufs es, da wir ja angenommen haben, dafs es an der Oberfläche gleich Null ist, durch den ganzen inneren Raum gleich Null sein.

Wenn wir demnach zwei Lösungen, φ_1 und φ_2, haben, welche beide der Bedingungsgleichung $\Delta \varphi = 0$ im ganzen inneren Raume entsprechen, so dafs also $\Delta \varphi_1 = 0$ und $\Delta \varphi_2 = 0$ ist und sie sind an der Oberfläche einander gleich, so gilt für ihre Differenz $(\varphi_1 - \varphi_2)$ ebenfalls die Gleichung $\Delta(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, und daraus folgt, dafs im ganzen Innern des Raumes $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ sein mufs, d. h. also, wenn der Werth einer Function, welche der Differentialgleichung $\Delta \varphi = 0$ genügt, an der Oberfläche eines geschlossenen Raumes gegeben ist, so giebt es nicht zwei verschiedene Lösungen für die Differentialgleichung, welche im Innern des Raumes von einander verschieden sein können. Es ist also die Differentialgleichung $\Delta \varphi = 0$ mit Festsetzung der Werthe, welche φ an der Oberfläche des geschlossenen Raumes haben soll, zur vollständigen Bestimmung der Function φ durch das ganze Innere dieses Raumes genügend.

III. Nun wollen wir noch erörtern, wie sich in dieser Beziehung der äufsere Raum verhält. Unter welchen Umständen werden die Integrale für den äufseren Raum, der bis zu einer unendlich entfernten Grenzfläche, die wir uns durch eine Kugel von unendlich grofsem Radius gebildet denken können, hinausreicht, endliche Werthe haben, beziehlich Null werden? Die Antwort ist entscheidend dafür, ob wir den Green'schen Satz in einem gegebenen Fall auch auf den äufseren Raum anwenden dürfen.

Wenn wir die einfachste Form solcher Functionen nehmen, nämlich $\frac{c}{r}$, so würde an einer unendlich entfernten Kugel der Differentialquotient nach der Normale, das wäre in diesem Falle also nach dem Radius der Kugel, abnehmen wie $\frac{1}{r^2}$. Da nach verschiedenen Richtungen die Werthe der Function verschieden sein können, so wollen wir uns eine Kegelecke herausgeschnitten denken, welche bei einer Kugel vom Radius 1 von dem Oberflächenelement $d\Omega$ begrenzt würde; dann wäre an einer Kugel vom Radius r ihre Oberfläche gleich $r^2 d\Omega$. In dem zu bildenden Producte, $\varphi . \frac{\partial \psi}{\partial n} . d\omega$ würde φ also wie $\frac{1}{r}$ und $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ wie $\frac{1}{r^2}$ abnehmen, und $d\omega$ würde gleich $r^2 . d\Omega$ sein. Der Factor von $d\Omega$ würde also, soweit er von r abhängig ist, gleich $\frac{1}{r}$ sein. Wenn nun auch die Werthe in verschiedenen Kegelöffnungen sehr verschieden von einander sind, so würden doch die Oberflächenintegrale, die sich auf die Grenzen des unendlichen Raumes beziehen, mit unendlich werdendem r verschwinden, und in unseren Gleichungen nur mit dem Werthe Null in Ansatz kommen.

Die Potentialfunctionen, welche wir früher behandelt haben, und welche von der Form $\frac{1}{r}$ sind, würden also zulässig sein, und in noch höherem Grade diejenigen, welche in der Entfernung wie $\frac{1}{r^2}$ abnehmen. Letztere sind z. B. die Potentialfunctionen von Magneten oder von elektrischen Ansammlungen in endlichen Entfernungen, bei denen stets gleich viel positive und negative Elektricität frei gemacht wird. Dann ist nämlich für die Entfernung das Potential von der Form $\frac{\cos \alpha}{r^2}$, wenn der Radius r mit der magnetischen Axe eines solchen kleinen Magneten den Winkel α bildet. Falls Magnete von gleichem Momente, aber in umgekehrter Richtung, an verschiedenen Stellen des Raumes liegen, so tritt sogar die dritte Potenz von r in den Nenner. Es giebt demnach eine grofse Menge von Fällen, in denen die Potentialfunctionen in der Entfernung stärker als $\frac{1}{r}$ abnehmen.

Wenn wir nun dieselbe Voraussetzung über die Abnahme der Functionen in dem Falle machen, wo die beiden Functionen φ und ψ einander gleich sind, und fernerhin wieder voraussetzen, dafs im ganzen unendlichen Raume $\Delta \varphi = 0$ ist, so wird in Glei-

chung (89) das Oberflächenintegral $\int \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega$ gleich Null werden, und ebenso wird auch das Raumintegral $\iiint \varphi \cdot \Delta \varphi \cdot dx.dy.dz$ verschwinden. Es würde daraus folgen, dafs auch das über den ganzen unendlichen Raum genommene Integral

$$\iiint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] . dx.dy.dz$$

gleich Null wird, und wir haben oben gesehen, dafs dieses nur möglich ist, wenn in allen Theilen des unendlichen Raumes φ constant ist: da es hier an den Grenzen aber gleich Null ist, so mufs es überall den Werth Null haben.

Daraus ergiebt sich nun weiter: Wenn zwei Functionen, die im Integrationsraume überall der Gleichung $\Delta \varphi = 0$ genügen, und welche in der Unendlichkeit mindestens wie $\frac{1}{r}$ abnehmen, und an allen geschlossenen Grenzflächen im Endlichen gleiche Werthe haben, so können sie im ganzen unendlichen Raum nicht von einander unterschieden sein. Wenn wir uns also auf Functionen beschränken, die in der Unendlichkeit in der angegebenen Weise nach Null convergiren, so gilt auch für den unendlichen Raum der Satz, dafs φ eindeutig gegeben ist, wenn es an den endlichen Grenzflächen gegeben ist.

IV. Es läfst sich zeigen, dafs alle Functionen, welche der Gleichung $\Delta \varphi = -4\pi F_{(x,y,z)}$ in einem geschlossenen Raume genügen, als Potentialfunctionen von Dichtigkeiten dargestellt werden können, die theils im Innern dieses Raumes, theils an seiner Oberfläche in einer einfachen Schicht, theils auf einer dort befindlichen Doppelschicht liegen. Zu dem Zwecke müssen wir wieder auf die ursprüngliche Form des GREEN'schen Satzes zurückgehen, in der die beiden Functionen φ und ψ noch von einander verschieden sind.

Wir nehmen von der Function φ an, dafs für sie überall $\Delta \varphi = -4\pi F_{(x,y,z)}$ sei; dagegen wählen wir für die Function ψ die Form $\frac{m}{r}$, wobei r von einem irgendwie bestimmten Punkte (ξ, η, ζ) bis zu dem veränderlichen Punkte x, y, z gerechnet wird. Unter diesen Umständen genügt ψ der Differentialgleichung $\Delta \psi = 0$ mit Ausnahme des Punktes ξ, η, ζ, in welchem die anziehende Masse m liegt. Wir wollen nun festsetzen, dafs von dem gesammten Raume eine kleine Kugel vom Radius ϱ ausgeschlossen werde, deren Mittelpunkt

mit dem Punkte ξ, η, ζ zusammenfalle; dann haben wir einen äufseren Raum, in welchem die Function ψ überall der Bedingung $\Delta \psi = 0$ genügt, und auf den unsere Gleichung (85) angewendet werden kann. Es fällt in ihr auf der linken Seite das letzte Glied fort, und wir erhalten daher:

$$\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot d\omega = \int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega - 4\pi \iiint \psi . F . dx . dy . dz \tag{90}$$

worin die Oberflächenintegrationen über alle Grenzflächen des äufseren Raumes auszudehnen sind. Diese Grenzflächen sind aber erstens die unendlich entfernte Grenzfläche und zweitens die Oberfläche der kleinen Kugel. Für die Function ψ ist nun aber durch die über sie gemachte Festsetzung bereits gegeben, dafs sie im Unendlichen verschwindend klein wird wie $\frac{1}{r}$.

Wir wollen nunmehr auch für die Function φ dieselbe Annahme machen, was unter der Bedingung der Fall sein wird, dafs F die endliche Dichtigkeit einer endlichen Masse ist, deren Theile alle im Endlichen liegen. Dann fallen beide Integrale an der unendlichen Grenzfläche fort. An der Oberfläche der kleinen Kugel, welche den zweiten Theil der Grenzfläche bildet, würde $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ gleich $-\frac{m}{\varrho^2}$ sein und $d\omega$ würde, wenn wir wieder wie oben die Kegelöffnung $d\Omega$ einführen, zu ersetzen sein durch $\varrho^2 . d\Omega$, so dafs wir also erhalten

$$\begin{aligned} \int \varphi . \frac{\partial \psi}{\partial n} . d\omega &= -\int \varphi . \frac{m}{\varrho^2} . \varrho^2 . d\Omega \\ &= -m \int \varphi . d\Omega \end{aligned} \tag{91}$$

Ferner ergiebt sich:

$$\begin{aligned} \int \psi . \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\omega &= \int \frac{m}{\varrho} . \frac{\partial \varphi}{\partial n} . \varrho^2 . d\Omega \\ &= m \int \varrho . \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\Omega \end{aligned} \tag{92}$$

so dafs also nunmehr

$$m \int \varphi . d\Omega = -m \int \varrho . \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\Omega + 4\pi m \iiint \frac{F}{r} . dx . dy . dz \tag{90a}$$

Da wir nun den Radius ϱ der Kugel beliebig klein werden lassen können, und φ nach den oben erörterten Bedingungen der Gültigkeit des GREEN'schen Satzes, als eine continuirliche Function zu betrachten ist, so kann man die auf der Oberfläche der verschwindend kleinen Kugel liegenden Werthe von φ als ununterschieden ansehen; wir wollen sie mit $\overline{\varphi}$ bezeichnen, so dafs also

$$m\int\varphi . d\,\Omega = \overline{\varphi} . m . \int d\,\Omega$$
$$= 4\,\pi . \overline{\varphi} . m \tag{93}$$

Das Glied $m\int\varrho . \frac{\partial\varphi}{\partial n} . d\,\Omega$ der Gleichung (90a) verschwindet aber, weil der unendlich kleine Factor ϱ darin enthalten ist, so dafs sich nunmehr ergiebt:

$$4\,\pi\,\overline{\varphi}\,m = 4\,\pi\,m\iiint\frac{F}{r} . dx . dy . dz$$

oder

$$\overline{\varphi} = \iiint\frac{F}{r} . dx . dy . dz \tag{90b}$$

Es kommt bei dieser Ableitung also heraus, was eigentlich im Voraus zu erwarten war, dafs nämlich φ in der Nähe eines beliebig gewählten Punktes dargestellt werden kann durch die Potentialfunction der im unendlich ausgedehnten Raume vertheilten Dichtigkeit.

Es ist nun noch zu zeigen, dafs mit einem Zusatz, der sich auf die Flächenbelegung bezieht, dieselbe Form der Lösung auch für begrenzte Räume gültig ist. Zu diesem Zwecke nehmen wir einen beliebig begrenzten Raum S an, dessen Volumelement mit $d\,S$ bezeichnet sei. Den Punkt (ξ, η, ζ), auf den sich die Potentialfunction bezieht, denken wir uns wieder mit einer Kugel umgeben, deren Radius schliefslich als verschwindend klein angenommen werden soll, und den Raum dieser Kugel nehmen wir aus von dem Raume S, über den sich die Integration erstreckt. Wenn wir nun die Gleichung (85) auf diesen Raum anwenden, so erhalten wir:

$$\int\varphi . \frac{\partial\psi}{\partial n} . d\omega + \int\varphi . \Delta\psi . d\,S = \int\psi . \frac{\partial\varphi}{\partial n} . d\omega + \int\psi . \Delta\varphi . d\,S \tag{94}$$

Wir wollen nun wiederum für die Function ψ einen bestimmten Werth setzen, nämlich $\psi = \frac{1}{r}$, wo unter r die Entfernung von dem Punkte (ξ, η, ζ) verstanden wird; dann ist aufserhalb jener verschwindend

kleinen Kugel überall, also auch in dem Raume S, $\Delta\psi = 0$, und das zweite Integral der linken Seite in Gleichung (94) fällt weg. Es wird dieses aber auch noch der Fall sein, wenn wir später die Integration über den ganzen äufseren bis in die Unendlichkeit sich erstreckenden Raum ausdehnen, da auch dort $\Delta\psi = 0$ angenommen werden kann.

Das Oberflächenintegral $\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} \cdot d\omega$ bekommt unter der gegenwärtigen Annahme für die unendlich kleine Kugel, wenn wir die früher eingeführten Bezeichnungen auch hier benutzen, den Werth $-\int \varphi . d\Omega$. Bei der äufseren Grenzfläche von S wollen wir aber für das Flächenelement die Bezeichnung $d\omega$ fest halten; dann ist dieser Theil des Integrals gleich $+\int \varphi \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} d\omega$.

Die Gleichung (94) verwandelt sich daher jetzt in

$$-\int \varphi . d\Omega + \int \varphi \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} . d\omega = \int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\omega + \int \psi . \Delta\varphi . dS \tag{95}$$

Der Theil des ersten Integrales auf der rechten Seite, welcher sich auf die kleine Kugel bezieht, fällt wieder weg, weil er den unendlich kleinen Factor ϱ nach Einsetzung der Werthe $\psi = \frac{1}{\varrho}$ und $d\omega = \varrho^2 . d\Omega$ enthält, und es bleibt nur derjenige Theil stehen, der auf die äufsere Grenzfläche von S Bezug hat. Die rechte Seite der Gleichung (95) wird daher:

$$\int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} \cdot d\omega + \int \frac{1}{r} \cdot \Delta\varphi . dS$$

Hierin repräsentirt $\Delta\varphi$ eine Dichtigkeit, welche wir gleich $-4\pi F$ gesetzt haben, so dafs sich nunmehr Gleichung (95) umformt in:

$$-\int \varphi . d\Omega + \int \varphi \cdot \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} \cdot d\omega = \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\omega - 4\pi \int \frac{1}{r} . F . dS \tag{96}$$

Aus einer der vorhin angestellten völlig analogen Ueberlegung folgt auch hier, dafs wir für das erste Integral der linken Seite den Werth $-4\pi . \varphi_{(\xi,\eta,\zeta)}$ erhalten, wo $\varphi_{(\xi,\eta,\zeta)}$ den Werth von φ im Mittelpunkte (ξ, η, ζ) der unendlich kleinen Kugel bezeichnet. Indem wir die Gleichung anders ordnen, erhalten wir daher:

$$-4\pi.\varphi_{(\xi,\eta,\zeta)} = -\int \varphi . \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} . d\omega + \int \frac{1}{r} . \frac{\partial \varphi}{\partial n} . d\omega - 4\pi . \int \frac{F}{r} . dS \quad (96a)$$

Die beiden letzten in dieser Gleichung vorkommenden Integrale sind zwei Potentialfunctionen gewöhnlicher Art, von denen die eine von der Raumdichtigkeit F, die andere von der Flächendichtigkeit $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ herrührt.

Wir wollen jetzt zeigen, dafs das erste Integral nach seiner unmittelbaren Bedeutung das Potential einer Doppelschicht darstellen

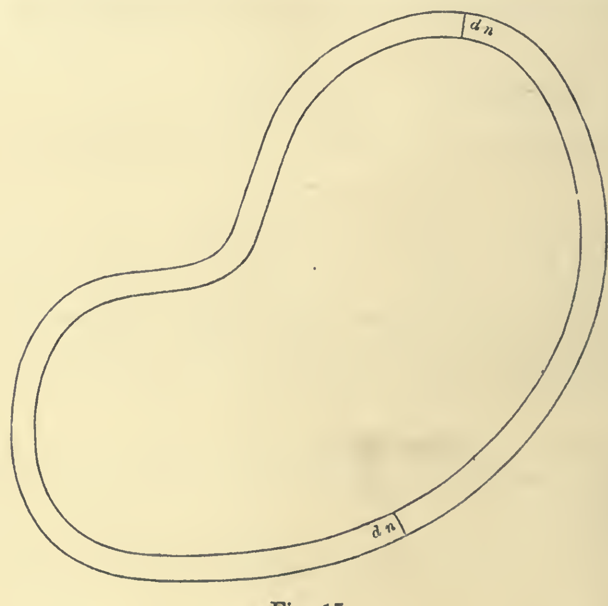


Fig. 17.

kann, welche die Oberfläche von S überzieht. Denkt man sich in einer verschwindend kleinen Entfernung, die mit dn bezeichnet sein möge, eine zweite der ersten parallele und immer in constanter Entfernung bleibende Fläche gelegt (Fig. 17), und die eine mit positiver Elektricität belegt, die andere mit eben so grofsen Quantitäten negativer Elektricität, so dafs also jedes Prisma, welches durch beiden Flächen gemeinsame Lothe begrenzt ist, aus beiden Flächen gleiche Quanta Elektricität, aber von verschiedenem Vorzeichen herausschneidet, so würde, wenn $\frac{\varphi}{dn}$ die Dichtigkeit der positiven Elektricität bezeichnet, die Potentialfunction der auf dem Flächen-

element $d\omega$ liegenden Masse gleich $\frac{\varphi}{dn}\cdot\frac{1}{r}\cdot d\omega$ sein. Dazu kommt aber das entgegengesetzte elektrische Quantum $-\frac{\varphi}{dn}\cdot d\omega$ in einer Entfernung, welche etwas gröfser ist als r, so dafs wir statt $\frac{1}{r}$ jetzt $\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot dn$ zu setzen haben. Also ist die von beiden Schichten herrührende Potentialfunction eines Flächenelementes gleich

$$\frac{\varphi}{dn}\cdot\frac{1}{r}\cdot d\omega-\frac{\varphi}{dn}\left[\frac{1}{r}+\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot dn\right]\cdot d\omega=-\varphi\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\omega$$

Es würde also das Integral $\int\varphi\cdot\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\cdot d\omega$ der Gleichung (96a) die Potentialfunction einer solchen auf der Oberfläche von S liegenden Doppelschicht darstellen, und nach unserer früheren Definition (§ 9) würde das Moment dieser Doppelschicht gleich φ sein.

Nun können wir aber, wenn wir den äufseren Raum mit hinzu nehmen, dieses Integral beseitigen, vorausgesetzt, dafs es möglich ist, eine Function φ_a zu finden, für welche im ganzen äufseren Raum $\Delta\varphi_a=0$ ist, und welche zugleich an der ganzen Grenze des Raumes S in ihren Werthen mit den Werthen der soeben behandelten Function, die wir mit φ_i bezeichnen wollen, zusammenfällt, so dafs also $\overline{\varphi_a}=\overline{\varphi_i}$ ist.

Wenn in Gleichung (94)

$$\varphi=\varphi_a$$

gesetzt, und die Integration über den äufseren Raum erstreckt wird, so hat man

$$\int\varphi_a\cdot\frac{\partial}{\partial n_a}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\omega=\int\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n_a}\cdot d\omega$$

Da φ_a auf der Fläche gleich φ_i ist, so können wir in Gleichung (96a) jetzt

$$\int\varphi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)d\omega=-\int\varphi_a\cdot\frac{\partial}{\partial n_a}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot d\omega$$

$$=-\int\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n_a}\cdot d\omega$$

setzen, und erhalten so

$$-4\pi . \varphi_{(\xi,\eta,\zeta)} = \int \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} \right) . d\omega - 4\pi \int \frac{1}{r} . F . dS$$

oder wenn wir durch -4π dividiren:

$$\varphi_{(\xi,\eta,\zeta)} = -\int \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} \right) . d\omega + \int \frac{1}{r} . F . dS \tag{97}$$

In dieser Gleichung ist der Werth von $\varphi_{(\xi,\eta,\zeta)}$ dargestellt durch eine Potentialfunction, welche die Raumdichtigkeit des inneren Raumes S enthält, und eine zweite Potentialfunction, deren Integral sich über die Grenzfläche der beiden unterschiedenen Räume erstreckt, an welcher als Dichtigkeit die Gröfse $-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} \right)$ auftritt, so dafs also diese Oberfläche hier wirkt, als wäre sie mit einer Flächendichtigkeit belegt. Wenn wir diese mit e bezeichnen, so ist also e durch die Gleichung:

$$-4\pi e = \frac{\partial \varphi}{\partial n_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} \tag{98}$$

bestimmt. Das Product $4\pi . e$ ist demnach gleich dem Sprung im Werthe des Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ an der Grenze des mit S bezeichneten Raumes.

Jede Function φ, welche für einen begrenzten oder für den unendlichen Raum dadurch bestimmt ist, dafs der Werth von $\Delta \varphi$ gegeben ist, kann somit auf Potentialfunctionen von bestimmten Dichtigkeiten zurückgeführt werden, die theils durch die schon gegebene Raumdichtigkeit, theils durch die Unstetigkeiten der Differentialquotienten der Function für die Flächen, in denen diese Discontinuitäten stattfinden, gegeben sind.

Dritter Abschnitt.

Umformung der Maxwell'schen Gleichungen in die Form der Wellengleichung.

§ 25. Erweiterung der Maxwell'schen Gleichungen auf elektrische Leiter.

Die in der älteren Form der Elektricitätslehre aus der Annahme nach dem COULOMB'schen Gesetze anziehender und in discreten Punkten angehäufter elektrischen Quanten abgeleiteten Sätze und Gleichungen sind mit den in dem vorigen Abschnitt behandelten völlig identisch. Die MAXWELL'schen Gleichungen und Voraussetzungen führen eben ganz nothwendig auf dieselbe Form der Lösung, und da wir von diesen Gleichungen ausgingen, so war der Nachweis nöthig, dafs die durch die alte Elektricitätslehre gegebenen Formen der Lösungen auch hier zutreffen, und dafs man die durch die MAXWELL'schen Gleichungen ausgedrückten Beziehungen direct gebrauchen kann, um von ihnen aus die Potentialfunctionen zu entwickeln, welche die Vertheilungen der elektrischen und magnetischen Kräfte in dem Raume darstellen.

Nun hatten wir die bisherigen Gleichungen nur auf isolirende Räume, d. h. also, auf den Aether, beziehlich den mit dielektrisch oder magnetisch polarisirbarer, ponderabler Materie gefüllten Aether bezogen. Bisher haben wir nun die Möglichkeit von Elektricitätsleitern in diesen Räumen noch ganz aufser Betracht gelassen. Wir wissen aber, dafs aufser den elektrischen Veränderungen, welche in isolirenden Körpern bei der Einwirkung elektrischer Kräfte eintreten, noch andere Formen von elektrischen Aenderungen oder elektrischen Bewegungen in leitenden Körpern vorkommen können, nämlich solche, welche in der älteren Elektricitätslehre als galvanische Ströme bezeichnet worden sind. Nach den bisherigen Annahmen flofs in diesem Falle eine imponderable Substanz durch die Länge des Leiters hindurch. In der MAXWELL'schen Betrachtungsweise müssen natürlich solche Ströme ebenfalls berücksichtigt werden. Wir wissen, dafs sie dieselben magnetisirenden Kräfte hervorbringen, welche in der MAXWELL'schen Hypothese den molecularen Elektricitätsbewegungen in den Isolatoren zugeschrieben werden. Historisch liegt die Sache sogar so, dafs wir zuerst von den magnetischen Wirkungen elektrischer Ströme, die durch einen Leiter gehen, Kenntnifs erhalten

haben. Bei ihnen entstehen rings um den Stromleiter herum kreisförmige magnetische Kräfte, und diese Eigenschaften sind dann erst später von Maxwell auf die Ladungen der Isolatoren oder die polarisirenden Veränderungen in den Isolatoren hypothetisch übertragen worden. Maxwell betrachtet wenigstens in Bezug auf die magnetischen Wirkungen also als gleichartige Processe die Strömungen der Elektricität durch einen Leiter, bei denen elektrische Quanta relativ grofse Strecken fortgeführt werden, und andererseits diejenigen Bewegungen der Elektricität, welche innerhalb der Molekeln stattfinden, wodurch das eine Ende des Molekels positiv, das andere negativ geladen wird.

Die früher (§ 11) gefundenen Gleichungen (30), welche die Abhängigkeit der Magnetkräfte von den elektrischen Momenten in Isolatoren darstellten, lauteten:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (99)$$

Nun würde aber, wenn wir Leiter im Felde haben, die in ihnen stattfindende Elektricitätsbewegung, die wir als galvanischen Strom zu bezeichnen pflegen, in gleicher Weise wie die polarisirenden Bewegungen in den Molekeln wirken, und ihre Wirkung würde sich zu derjenigen der letzteren addiren. Zu der Gröfse $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$ würde also in dem betreffenden Querschnitt die nach x gerichtete Componente der Dichtigkeit des galvanischen Stromes hinzukommen. Der Differentialquotient $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$ bezieht sich nun auf die Elektricitätsbewegung, welche durch das Flächenelement $dy.dz$ hindurch geht, und als Componenten des galvanischen Stromes bezeichnet man ebenfalls diejenigen Mengen von Elektricität, welche durch Flächenelemente hindurch gehen, die senkrecht zu der Strömungsrichtung der betreffenden Componente gerichtet sind, berechnet für die Einheit der Fläche. Wenn wir von dem Strom einer ponderablen Flüssigkeit reden, so haben wir dort materielle Elemente, welche sich mit einer bestimmten Geschwindigkeit durch den Raum fortbewegen, und wir können daher von der Weggeschwindigkeit sprechen, mit der diese Elemente voranschreiten; bei der Elektricität,

namentlich nach der MAXWELL'schen Betrachtungsweise, können wir aber von substantiellen Theilchen gar nicht reden, und es hat deshalb auch gar keinen Sinn, die Geschwindigkeit in die Gleichungen einführen zu wollen. Wir können nur von der Menge Elektricität reden, die durch ein gegebenes Flächenelement in gegebener Zeit hindurch fliefst, und wollen daher unter der Stromcomponente u die Menge Elektricität verstehen, welche in der Zeiteinheit durch diejenige Flächeneinheit hindurch fliefst, welche senkrecht zur x-Axe ist, vorausgesetzt, dafs die Strömung in allen Punkten der Fläche dieselbe ist.

Wir würden daher in der ersten dieser Gleichungen (99) zu dem Werthe von $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$ noch den Werth der Componente u hinzu setzen und in analoger Weise die zweite und dritte jener Gleichungen erweitern müssen, so dafs sich also ergäbe:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi A.u + 4\pi A.\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ 4\pi A.v + 4\pi A.\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ 4\pi A.w + 4\pi A.\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (100)$$

Nun sagt das OHM'sche Gesetz aus, dafs die Intensität eines elektrischen Stromes durch einen bestimmten Querschnitt proportional sei der elektrischen Kraft, welche die Elektricität in der betreffenden Richtung vorwärts treibt, so dafs also hier u der elektrischen Kraft X im Innern des Leiters proportional ist. Wir würden demnach

$$u = \lambda . X$$

anzunehmen haben. In isotropen Substanzen, welche nach allen Richtungen die gleichen Eigenschaften zeigen, ist dieser Proportionalitätsfactor λ für die anderen Stromcomponenten derselbe, so dafs also

und

$$\left.\begin{aligned} u &= \lambda . X \\ v &= \lambda . Y \\ w &= \lambda . Z \end{aligned}\right\} \quad (101)$$

zu setzen ist. Nun ist aber ferner nach den Gleichungen (35):

$$X = \frac{4\pi}{\varepsilon} . \mathfrak{X}$$

$$Y = \frac{4\pi}{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y}$$

und

$$Z = \frac{4\pi}{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Z}$$

und demnach erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} u &= 4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{X} \\ v &= 4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{Y} \\ w &= 4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} \mathfrak{Z} \end{aligned}\right\} \quad (101\text{a})$$

und

so dafs sich schliefslich ergiebt:

$$\left.\begin{aligned} 4(\pi)^2 \frac{\lambda}{\varepsilon} A \cdot \mathfrak{X} + 4\pi A \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ (4\pi)^2 \frac{\lambda}{\varepsilon} A \cdot \mathfrak{Y} + 4\pi A \cdot \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ (4\pi)^2 \frac{\lambda}{\varepsilon} A \cdot \mathfrak{Z} + 4\pi A \cdot \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (102)$$

Dabei ist noch zu bemerken, dafs die Bewegung der Elektricität in Leitern ein Procefs ist, durch welchen die elektrische Energie zerstört und gleichzeitig auf Kosten derselben in den betreffenden Leitern Wärme entwickelt wird; es ist dies also ein nicht conservativer Procefs, im Gegensatz zu den in unseren bisherigen Gleichungen, die sich nur auf Isolatoren bezogen, berücksichtigten Vorgängen.

§ 26. Die elektrische Dichtigkeit.

Die Gröfsen auf der rechten Seite der Gleichungen (102) können wir fortschaffen, wenn wir die erste Gleichung nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differentiiren und alle addiren. Wir erhalten dann rechts den Werth Null, und indem wir durch den allen Gliedern gemeinsamen Factor $4\pi A$ dividiren, ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} 0 = 4\pi \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \mathfrak{X}\right] + 4\pi \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Y}\right] + 4\pi \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \mathfrak{Z}\right] \\ + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right] \end{aligned}\right\} \quad (103)$$

Den in der letzten Klammer stehenden Ausdruck haben wir in § 14

schon als die Raumdichtigkeit der Elektricität kennen gelernt und dort mit σ bezeichnet. Benutzen wir auch hier diese Bezeichnung, so erhalten wir zunächst für den Fall, dafs $\frac{\lambda}{\varepsilon}$ durch den Raum constant ist:

$$0 = 4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} . \sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \tag{104}$$

Daraus folgt, wenn wir die Gleichung durch σ dividiren,

$$0 = 4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} + \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial t} (\log \sigma) = -4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} \tag{104a}$$

woraus sich durch Integration ergiebt:

$$\log \sigma = C - 4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot t \tag{104b}$$

so dafs also log σ als eine Function der Zeit gegeben ist. Wenn wir vom Logarithmus zu der Gröfse selbst übergehen, erhalten wir

$$\sigma = e^C . e^{-4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} . t} \tag{104c}$$

Daraus ergiebt sich die Abhängigkeit des Werthes σ von der Zeit.

Da nun $e^{-4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} . t}$ eine Function ist, die mit steigender Zeit immer kleiner wird — denn λ und ε sind ihrer Natur nach positive Gröfsen — und nach Null hin convergirt, so verschwindet die elektrische Dichtigkeit mit der Zeit, wenn sie in einem in Bezug auf das Leitungsvermögen und die dielektrische Constante gleichmäfsigen Raume von Null verschieden ist, dadurch, dafs in ihrer Nähe die Ströme u, v, w entstehen. Im Innern eines homogenen Leiters wird demnach die elektrische Dichtigkeit mit der Zeit immer gleich Null, und zwar ist dazu in Wirklichkeit bei den gut leitenden Körpern eine so kurze Zeit erforderlich, dafs wir gewöhnlich gar nicht im Stande sind, sie zu messen. Es zeigt also dies Verhalten an, dafs elektrische Dichtigkeit, die im Innern eines Leiters sich in einem gegebenen Augenblicke aufgehäuft haben sollte, nach kurzer Zeit verschwindet, indem sie sich in dem Leiter vertheilt. Wenigstens verschwindet sie, soweit der Leiter homogen ist. Falls er dies nicht ist, ergiebt Gleichung (103) dagegen:

$$0 = 4\pi \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\lambda}{\varepsilon} \sigma + \mathfrak{X} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) + \mathfrak{Y} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) + \mathfrak{Z} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right) \tag{105}$$

was anzeigt, dafs $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ werden, also σ constant bleiben kann, ohne dafs es gleich Null wird, wenn auch $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ constante Werthe annehmen, was unter anderen Fällen nach Gleichung (101 a) namentlich dann geschieht, wenn man die Stromcomponenten u, v, w in constanter Stärke unterhält. Dabei wird namentlich an der Grenze zweier Leiter von verschiedenem Leitungsvermögen eine elektrische Schicht dauernd angehäuft, die nicht verschwindet, so lange der Strom besteht, worauf wir hier nicht näher einzugehen brauchen.

In einem Nichtleiter ist die Leitungsfähigkeit $\lambda = 0$, und daher verwandelt sich bei einem solchen die Gleichung (104) in

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0$$

die in Uebereinstimmung mit der früher (§ 14) gefundenen Gleichung (44) aussagt, dafs in diesem Falle die Dichtigkeit σ eine nach der Zeit constante Gröfse ist.

§ 27. Die Strömungen der Elektricität. — Sogenannte ungeschlossene Ströme.

Die Gleichung (103) können wir über einen begrenzten Raum integriren und dann nach dem GREEN'schen Satze dieses Raumintegral in ein Oberflächenintegral umformen. Da nun überall in dem betreffenden Raum die integrirte Gröfse gleich Null ist, so wird auch das ganze Integral gleich Null werden, und wir bekommen also

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \iiint \left\{ 4\pi \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{X}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{Y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{Z}\right)\right] \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right]\right\} dx.dy.dz \\ &= \int \left\{ \left(4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{X} + \frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\right)\cos a + \left(4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{Y} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}\right)\cos b \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \left(4\pi\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\mathfrak{Z} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}\right)\cos c \right\} d\omega \end{aligned}\right\} \quad (106)$$

Jedes Glied dieses letzten Integrales ist die in Richtung einer Coordinate fallende Componente des Gesammtstromes, multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den die Normale der Oberfläche mit der betreffenden Componente der Strömung macht, und das Integral stellt also die Gesammtströmung dar, welche durch elektrische Leitung

und molekulare Vertheilung entsteht und durch die Oberfläche des Raumes hindurch geht. Aus unserer Gleichung (106) ergiebt sich also, dafs sie immer gleich Null ist, d. h. also: Aus der MAXWELL'schen Vorstellungsweise folgt allgemein, dafs jede elektrische Strömung, auch eine solche, welche gegen das Ende eines Leiters hinführt, an keiner Stelle des Leiters wahre Elektricität anhäuft.

Wenn in einem Leiter positive Elektricität zu dem Ende des Leiters strömt, d. h. wenn an diesem Ende die Molekel ihre positiven Pole nach aufsen wenden, so würde von da aus unmittelbar eine weitere Polarisirung der umliegenden Molekeln erfolgen, die nun in den Raum hinein sich ausbreitet (Fig. 18), und wobei in den Isolator die Bewegung, welche in dem Leiter vorhanden war, fortgesetzt wird. Ein Unterschied besteht nur darin, dafs diese Ladung, sobald sie eintritt, auch gleich ein elektrisches Potential hervorbringt, welches auf den Leiter zurückwirkt, so dafs die bisher vorhandenen elektromotorischen Kräfte des Leiters diese Ladung nicht weiter fortsetzen können, und der Strom in dem Leiter also nothwendig aufhört.

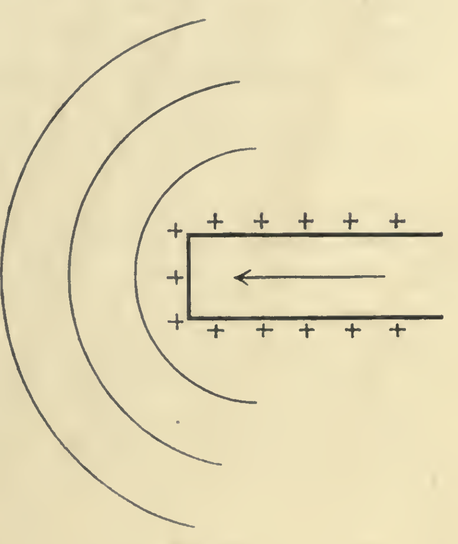


Fig. 18.

Es ist dies ein wichtiger Punkt in der MAXWELL'schen Theorie; nach dieser Theorie giebt es eben keine ungeschlossenen Ströme. Von jeder sich ladenden Grenzfläche eines Leiters setzt sich die elektrische Bewegung in den umliegenden Isolator fort, indem sie in diesem elektrische Momente ausbildet, und zwar, wie die letzte Gleichung (106) zeigt, in solcher Stärke, dafs schliefslich die Menge Elektricität, welche durch jeden Querschnitt des umschliefsenden Isolators in Form der entstehenden molekularen Ladungen tritt, immer gleich ist der Menge Elektricität, welche durch den Querschnitt des Leiters geflossen ist. Hierdurch sind die Schwierigkeiten beseitigt, welche den älteren Theorien in Bezug auf die Vorgänge anhaften, die nach dem Gesetze von der Constanz der Energie an dem Ende geschlossener Ströme vorkommen müfsten.

Es läfst sich, wie auch neuerdings von HERTZ und den anderen Physikern, die seine Versuche wiederholt haben, experimentell gezeigt worden ist, in der That nachweisen, dafs jedes plötzliche Zuströmen der Elektricität an das Ende eines Leiters ein System von elektrischen Ladungen und elektromagnetischen Oscillationen in dem umliegenden Isolator erregt, wodurch diese Elektricitätsbewegung in die Ferne fortgesetzt wird.

§ 28. Die Constanz der elektrischen Quanten.

Aus den drei Gleichungen (102) haben wir in § 26 durch Differentiation nach x, bez. y, bez. z und Addition der dann entstandenen Gleichungen, nachdem wir den gemeinsamen Factor $4\pi A$ überall weggelassen, die Gleichung (103)

$$0 = 4\pi\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{X}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{Y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\mathfrak{Z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x}+\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y}+\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right]$$

erhalten, welche innerhalb eines beliebig umgrenzten Raumes gilt.

Wir nehmen nun an, wir hätten einen Raum, in dessen Innerem ein Leiter mit irgendwie vertheilten elektrischen Zuständen liege, und seine Oberfläche sei von einer isolirenden Hülle umgeben, in welcher also das Leitungsvermögen $\lambda = 0$ zu setzen ist. Wenn wir daher diese Gleichung über den ganzen Raum integriren, so bekommen wir, wenn in dem letzten Integral statt der Klammer wieder σ geschrieben und die Reihenfolge der Integration und Differentiation vertauscht wird:

$$0 = 4\pi\int\frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\left[\mathfrak{X}\,.\cos a + \mathfrak{Y}\,.\cos b + \mathfrak{Z}\cdot\cos c\right]d\omega + \frac{\partial}{\partial t}\int\sigma\,.\,dS \quad (107)$$

Unserer Annahme gemäfs haben wir längs der Oberfläche λ gleich Null zu setzen, und es wird also das erste Integral gleich Null, folglich ist

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\sigma\,.\,dS = 0 \quad (107\text{a})$$

Nun stellt aber das Raumintegral $\int\sigma\,.\,dS$ das Quantum wahrer Elektricität dar, welches in dem ganzen Raume enthalten ist, und die letzte Gleichung (107a) sagt also aus, dafs die Aenderung des Gesammtquantums der Elektricität in dem ganzen Raume gleich Null ist.

Es folgt also aus den MAXWELL'schen Gleichungen, dafs in einem

Leiter, der von einer vollständig isolirenden Hülle umgeben ist, bei allen elektrischen und magnetischen Vorgängen, welche durch die hier aufgestellten Gleichungen umfaſst werden, und die auch das Vorhandensein elektrisch leitender Körper mit umschlieſsen, das Quantum der Elektricität unveränderlich bleiben muſs, so daſs also die Vorstellung bestehen bleibt, von welcher die ältere Theorie ausgeht, daſs nämlich die beiden Elektricitäten nach der dualistischen, oder die eine Elektricität nach der unitarischen Theorie, unzerstörbar sind, und nur durch ihre Vereinigung verschwinden können. Hier ist dieses aber die Folgerung aus einem System von Integrationen, es liegt nicht in den Voraussetzungen, sondern die Quantität der Elektricität tritt hier als eine Integrationsconstante auf, indem die ursprünglichen Gleichungen zunächst nur aussagen, daſs die Veränderung dieser Quantität gleich Null ist. Die unveränderliche Gröſse ist also eine Integrationsconstante von derselben Art, wie solche auch in der Dynamik ponderabler Körper auftreten, z. B. in den Gesetzen von der Constanz der Energie oder der Constanz der Bewegung des Schwerpunktes oder der Constanz des Rotationsmomentes für Körpersysteme, auf welche keine äuſseren Kräfte einwirken. In derselben Weise ergiebt sich also hier die Constanz des Quantums der Elektricität. Es ist dies wahrscheinlich der Hauptgrund, warum Maxwell's Behandlung der Elektricitätslehre für die Auffassung so viel Schwierigkeit gemacht und es so lange gedauert hat, bis sie allgemein verbreitet und verstanden worden ist.

Die Maxwell'schen Gleichungen sind also vollkommen vereinbar mit der Vorstellung, daſs an gewissen Körperelementen der isolirenden Körper, oder in Körpern, welche ringsum von isolirenden Hüllen umgeben sind, constante Quanta von Elektricität dauernd haften können. Damit ist eine der Grundvorstellungen der alten Elektricitätslehre auch für das Maxwell'sche System bestätigt, daſs nämlich von vorhandener Elektricität nur durch Leitung etwas verloren gehen kann, oder dadurch, daſs die eine Art der Elektricität von der entgegengesetzten neutralisirt wird.

§ 29. Weitere Umformung der Maxwell'schen Gleichungen in isolirenden Medien.

Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen untersuchen, welche sich auf unendlich kleine elektromagnetische Schwingungen im Aether oder in einer andern durchsichtigen Substanz beziehen, und zwar wollen wir uns dabei zunächst auf isolirende Substanzen beschränken.

Die Bewegungsgleichungen kann man in zwei verschiedenen Formen aufstellen, einmal indem man in ihnen die Kräfte, und das andere Mal die Momente benutzt.

Die Momente bezeichnen den geänderten Zustand im Aether; die Kräfte kann man zwar auch als Symptome dieses Zustandes betrachten, aber sie sind doch erst abgeleitete Gröfsen. William Thomson und Maxwell haben sie in ihren Darstellungen vorgezogen, weil sie als das unmittelbar wahrnehmbare Zeichen des veränderten Zustandes erscheinen.

Die letzte Form, in welche wir die Maxwell'schen Gleichungen gebracht hatten, war unsere Gleichungen (49). Wir wollen von ihnen hier ausgehen. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned} A\cdot\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) \\ A\cdot\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) \\ A\cdot\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) \end{aligned}\right\} \tag{108}$$

und

Die analogen Gleichungen, welche die Veränderungen der elektrischen Momente ausdrücken, lauten, wenn wir $A = B$ setzen dürfen,

$$\left.\begin{aligned} A\cdot\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) \\ A\cdot\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) \\ A\cdot\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) \end{aligned}\right\} \tag{109}$$

und

Da die beiden Gleichungssysteme dieselbe Form haben, so wollen wir die weitere Umformung nur an dem letzten System vornehmen. Differentiiren wir die erste dieser Gleichungen nach t, so ergiebt sich:

$$A\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial^2}{\partial t\,\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) \tag{110}$$

oder, wenn wir die Ordnung der Differentiationen umkehren und berücksichtigen, dafs wenigstens im ruhenden Aether μ eine der Zeit nach constante Gröfse ist:

$$A\cdot\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}\right) \tag{110a}$$

Setzen wir nun die Werthe von $\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}$ aus den Gleichungen (108) ein, so erhalten wir

$$A \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)\right] - \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)\right]$$

oder

$$\left.\begin{aligned} A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = {} & \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)\right] \\ & - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{110b}$$

Aus dieser Gleichung sind die magnetischen Gröfsen schon herausgeschafft, so dafs dieselbe nur eine Beziehung zwischen elektrischen Gröfsen ausdrückt. In ihr sind nun aber die dielektrischen und magnetischen Constanten in einer sehr verwickelten Form enthalten. Wir wollen sie daher zunächst unter der Voraussetzung weiter behandeln, dafs die Fortpflanzung, beziehlich der weitere Verlauf der betreffenden Bewegung in einem homogenen Felde geschieht, d. h. in einem Felde, in dessen ganzer Ausdehnung μ und ε die gleichen constanten Werthe besitzen, und dann erst später auf solche Felder übergehen, in denen verschiedene Werthe von μ und ε vorhanden sind. Bei den letzteren sind die praktisch wichtigen Fälle namentlich diejenigen, in denen in einer scharfen Grenze die Werthe von μ und ε plötzlich springen, wo also die betreffenden Räume mit zwei verschiedenen durchsichtigen Substanzen angefüllt sind.

Unter der von uns zunächst gemachten Voraussetzung kann man die Gröfsen μ und ε unter dem Differentiationszeichen wegnehmen und vor dasselbe setzen. Wir bekommen dann die Gleichung:

$$A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y^2}\right] - \frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y}\right] \tag{111}$$

und wenn wir zu beiden Gliedern der rechten Seite $\frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial x^2}$ hinzufügen:

$$\left.\begin{aligned} A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = {} & \frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \left[\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial z^2}\right] \\ & - \frac{1}{\varepsilon \mu} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right] \end{aligned}\right\} \tag{111 a}$$

Mit den von uns schon angewendeten Bezeichnungen können wir nun diese Gleichung kürzer schreiben:

$$A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon \mu} \left[\varDelta \mathfrak{X} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \tag{111b}$$

Weil sich nun in einem isotropen Medium die x-Componenten in keiner Weise von den y- und z-Componenten unterscheiden, so können wir die beiden anderen Gleichungen analog bilden, und erhalten demnach das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \left[\varDelta \mathfrak{X} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] \\ A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \left[\varDelta \mathfrak{Y} - \frac{\partial \sigma}{\partial y} \right] \\ A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon \mu} \left[\varDelta \mathfrak{Z} - \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Wir können nun aus diesen Gleichungen die Dichtigkeit σ, von der wir bereits wissen, dafs sie in den einzelnen Volumenelementen eines isolirenden Mediums nach der Zeit constant ist, eliminiren und die Gleichungen dadurch auf eine einfachere Form zurückführen. Zu diesem Zwecke ziehen wir je zwei Gleichungen von einander ab, nachdem wir jede nach derjenigen Coordinate differentiirt haben, welche in der anderen vorkommt, z. B. wenn wir die beiden ersten Gleichungen mit einander verbinden, die erste von ihnen nach y, die zweite nach x.

Es ergiebt sich dann das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} A^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} \right) &= \frac{1}{\mu \varepsilon} \cdot \varDelta \left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} \right) \\ A^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\mu \varepsilon} \cdot \varDelta \left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} \right) \\ \text{und} \quad A^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} \right) &= \frac{1}{\mu \varepsilon} \cdot \varDelta \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} \right) \end{aligned}\right\} \tag{113}$$

Die weitere Fortführung dieser Untersuchung kommt also auf die Forderung hinaus, dafs wir Differentialgleichungen von der Form der Gleichungssysteme (112) und (113) lösen können. Es sind dieses aber dieselben Gleichungen, auf welche auch die elastische Lichttheorie, freilich in einer anderen Ableitung, geführt hat, und welche für die Wellenbewegung im Innern elastischer Medien überhaupt

gelten. Denn bezeichnet man mit m die Volumdichte, mit σ die Volumdehnung und mit k und $2k(1+\theta)$ zwei gewisse elastische Constanten, so besteht dort für die in Richtung der Coordinataxen vor sich gehenden Verschiebungen ξ, η, ζ folgendes Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= k \,.\, \Delta\xi + 2k(1+\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial x} \\ m\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= k \,.\, \Delta\eta + 2k(1+\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial y} \\ m\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= k \,.\, \Delta\zeta + 2k(1+\theta)\frac{\partial\sigma}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad (114)$$

und aus diesem ergiebt sich durch eine der obigen völlig analoge Elimination von σ:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) &= k \,.\, \Delta\left(\frac{\partial\eta}{\partial z} - \frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) \\ m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) &= k \,.\, \Delta\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\xi}{\partial z}\right) \\ m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) &= k \,.\, \Delta\left(\frac{\partial\xi}{\partial y} - \frac{\partial\eta}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \quad (115)$$

worin die in Klammern stehenden Ausdrücke gleich den doppelten Drehungswinkeln um die Coordinataxen sind.

Der Unterschied zwischen diesen Gleichungen (114) und (115) und den von uns abgeleiteten (112) und (113), worin die Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ an Stelle der Verschiebungen ξ, η, ζ getreten sind, besteht nur in der anderen physikalischen Bedeutung der Constanten, und es wird sich später ergeben, dafs dieses für die Fortpflanzung der Oscillationen durch die Grenze zwischen verschiedenen durchsichtigen Medien von Bedeutung ist; denn die hier zu berücksichtigenden Grenzbedingungen fallen für die elektromagnetische Theorie anders aus, als für die elastische Undulationstheorie.

In einem Isolator hat die elektrische Dichtigkeit σ einen nach der Zeit constanten Werth, und bei der Aufsuchung der Gesetze für sehr schnelle Aenderungen, wie sie bei den Lichtschwingungen eintreten, kommt ein solcher nicht in Betracht. Vielmehr können wir nach den oben (§ 15) erörterten Eigenthümlichkeiten der nicht homogenen linearen Differentialgleichungen das allgemeine Integral der Gleichungen (112) zusammensetzen aus einer Summe beliebiger Lösungen derselben Gleichungen, in denen $\sigma = 0$ gesetzt ist, nämlich

$$\left.\begin{aligned} A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu \varepsilon} \cdot \Delta \mathfrak{X} . \\ A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu \varepsilon} \cdot \Delta \mathfrak{Y} . \\ A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\mu \varepsilon} \cdot \Delta \mathfrak{Z} . \end{aligned}\right\} \quad (116)$$

und je einer Lösung der Gleichungen, in denen σ eine gegebene Function der Coordinaten und unabhängig von der Zeit ist, wobei dann auch die $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ unabhängig von der Zeit erhalten werden können. Wenn wir nun Functionen gefunden haben, welche diesen vereinfachten Gleichungen (116) genügen, so werden, da die Reihenfolge der Differentiationen vertauscht werden kann, auch die Differentialquotienten dieser Lösungen, soweit sie nicht Discontinuitäten erzeugen, ebenfalls Lösungen sein. Weil nun die Gleichungen homogen und linear sind und constante Coefficienten haben, so sind auch homogene lineare Functionen solcher Lösungen wiederum Lösungen derselben Gleichungen. Damit ist zugleich gegeben, dafs diese Lösungen für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in die Gleichungen (113) eingesetzt, diese ebenfalls erfüllen.

§ 30. Weitere Umformung der Maxwell'schen Gleichungen mit Berücksichtigung vorhandener Leiter.

Wenn Leitung vorhanden ist, so sind in den Gleichungen (112) noch gewisse Glieder einzusetzen, die wir früher (§ 25) schon kennen gelernt haben. Es mufste damals noch

$$4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} A . \mathfrak{X} \quad \text{zu} \quad A . \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$$

$$4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} A . \mathfrak{Y} \quad \text{zu} \quad A . \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}$$

und

$$4\pi \frac{\lambda}{\varepsilon} A . \mathfrak{Z} \quad \text{zu} \quad A . \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$$

hinzugefügt werden. Da in den Gleichungen nun aber nicht die ersten, sondern die zweiten Differentialquotienten nach der Zeit von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ vorkommen, so treten in ihnen mit gleichzeitiger Berücksichtigung der anderen Coefficienten die Glieder

$$4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} . \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$$

$$4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}$$

und

$$4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$$

hinzu, so dafs wir also, wenn die betreffenden Medien elektrische Leitungsfähigkeit besitzen, die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + A^2 . \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon\mu}\left[\Delta \mathfrak{X} - \frac{\partial \sigma}{\partial x}\right]\\
4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + A^2 . \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon\mu}\left[\Delta \mathfrak{Y} - \frac{\partial \sigma}{\partial y}\right]\\
\text{und}\quad 4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + A^2 . \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon\mu}\left[\Delta \mathfrak{Z} - \frac{\partial \sigma}{\partial z}\right]
\end{aligned}\right\} \quad (117)$$

erhalten.

Ebenso, wie wir im vorigen Paragraphen die Gleichungen (112) in (113) umgewandelt haben, können wir nun auch diese Gleichungen (117) auf eine Form bringen, in der σ eliminirt ist. Dieses geschieht hier durch die völlig gleiche rechnerische Operation wie damals, und wir erhalten dann das Gleichungssystem:

$$\left.\begin{aligned}
4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\right] + A^2 . \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\right] &\\
= \frac{1}{\mu\varepsilon} . \Delta \left[\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y}\right] &\\
4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}\right] + A^2 . \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}\right] &\\
= \frac{1}{\mu\varepsilon} . \Delta \left[\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z}\right] &\\
\text{und}\quad 4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}\right] + A^2 . \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}\right] &\\
= \frac{1}{\mu\varepsilon} . \Delta \left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x}\right] &
\end{aligned}\right\} \quad (118)$$

Aufserdem aber folgt aus den Gleichungen (117), indem wir die erste nach x, die zweite nach y, die dritte nach z differentiiren und dann alle addiren

$$4\pi A^2 . \frac{\lambda}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial t} + A^2 . \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = 0 \qquad (118\text{a})$$

welche Gleichung sich übrigens auch aus der Gleichung (104) ergiebt. Das Integral der letzteren ist in (104c) schon gegeben.

§ 31. Beschränkung auf die Abhängigkeit von einer Coordinate. — Ebene Wellen.

Wir haben nun oben in §§ 7 und 8 schon ähnliche Gleichungen, wie die soeben abgeleiteten Gleichungen (116) behandelt, wo aber die zu suchende Gröfse nur von einer der Coordinaten abhängig war. In diesem Falle würde hier an Stelle von $\Delta\mathfrak{X}$ nur $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial y^2}$ oder $\frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial z^2}$ stehen bleiben. Es waren das die Gleichungen (13) und (22)

$$h \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

und

$$h \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = k^2 \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

welche die einfachsten der verschiedenen Wellenbewegungen, nämlich ebene Wellen darstellten, so dafs also in den Differentialgleichungen (116), die wir hier gefunden haben, unter anderem die Bewegungen in ebenen Wellen enthalten sind, welche wir in §§ 6, 7 und 8 schon kennen gelernt haben. Wir fanden damals, dafs die Bewegung in der Richtung derjenigen Coordinate fortlief, von welcher die Gröfse der Verschiebung allein abhing, während gleiche Phasen in denjenigen Ebenen herrschten, die zu ihrer Fortpflanzungsrichtung senkrecht waren. In unseren Gleichungen (116) haben wir nun an Stelle der Verschiebungen elektrische (bez. magnetische) Polarisationen, und von diesen wissen wir bereits (§ 10), dafs sie sich stets in einer Richtung fortpflanzen, die senkrecht zu ihrer eigenen Richtung ist.

Nehmen wir nun an, dafs ihre Gröfse in einer auf der Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene in jedem Momente dieselbe ist, so werden, wenn z. B. die x-Richtung die Fortpflanzungsrichtung ist, nur Polarisationen nach y und z vorkommen können, so dafs wir also erhalten

$$\left.\begin{aligned} A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon\mu} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial x^2} \\ \text{und} \qquad A^2 \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} &= \frac{1}{\varepsilon\mu} \cdot \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial x^2} \end{aligned}\right\} \quad (119)$$

Es war nun aber (§ 8) in unserer Gleichung (22)

$$h \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = k^2 \cdot \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}$$

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich $\sqrt{\frac{k^2}{h}}$, so dafs also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der ebenen elektromagnetischen Wellen gleich $\frac{1}{A\sqrt{\varepsilon \cdot \mu}}$ sein würde, was mit unserem früheren Ergebnifs (Gleichung (41) in § 12) in völligem Einklang steht.

§ 32. Die Strahlenrichtung als Fortpflanzungsrichtung maximaler Energiemengen.

Wir haben früher (§ 10) schon gesehen, dafs neben der elektrischen Polarisation immer noch eine magnetische Polarisation eintreten mufs, und zwar ist diese stets senkrecht zu der ersteren. Es ergab sich damals, dafs bei derartigen ebenen Wellen gleichzeitig immer zwei transversale Verschiebungen eintreten, Verschiebungen elektrischer und magnetischer Quanten, die senkrecht zu einander und senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung stehen.

Die für diese beiden Verschiebungssysteme in § 11 abgeleiteten Gleichungen (30) und (31) lauteten

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$

und

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$4\pi A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

Nun hatten wir angenommen, dafs die elektrischen und magnetischen Polarisationen proportional den sie erzeugenden Kräften seien, und zwar hatten wir nach den Gleichungen (32) und (33)

$$\mathfrak{X} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot X$$

$$\mathfrak{Y} = \frac{\varepsilon}{4\pi} . Y$$

$$\mathfrak{Z} = \frac{\varepsilon}{4\pi} . Z$$

und

$$\mathfrak{L} = \frac{\mu}{4\pi} . L$$

$$\mathfrak{M} = \frac{\mu}{4\pi} . M$$

$$\mathfrak{N} = \frac{\mu}{4\pi} . N$$

gesetzt. Wir können daher jene sechs Gleichungen umformen in:

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ A\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ A\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (120)$$

und

$$\left.\begin{aligned} A\mu \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ A\mu \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ A\mu \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (121)$$

Multipliciren wir nunmehr die erste dieser Gleichungen mit X, die zweite mit Y, die dritte mit Z, die vierte mit L, die fünfte mit M, die sechste mit N, addiren alle und integriren dann über den ganzen Raum, so bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned} A . \iiint \Big[\varepsilon \Big(X \frac{\partial X}{\partial t} + Y \frac{\partial Y}{\partial t} + Z \frac{\partial Z}{\partial t} \Big) \\ + \mu \Big(L \frac{\partial L}{\partial t} + M \frac{\partial M}{\partial t} + N \frac{\partial N}{\partial t} \Big) \Big] dx . dy . dz \\ = \iiint \Big\{ \Big[L \frac{\partial Y}{\partial z} + Y \frac{\partial L}{\partial z} - L \frac{\partial Z}{\partial y} - Z \frac{\partial L}{\partial y} \Big] \\ + \Big[M \frac{\partial Z}{\partial x} + Z \frac{\partial M}{\partial x} - M \frac{\partial X}{\partial z} - X \frac{\partial M}{\partial z} \Big] \\ + \Big[N \frac{\partial X}{\partial y} + X \frac{\partial N}{\partial y} - N \frac{\partial Y}{\partial x} - Y \frac{\partial N}{\partial x} \Big] \Big\} dx . dy . dz \end{aligned}\right\} \quad (122)$$

Den Theil des Integrals der rechten Seite, welcher die erste eckige Klammer als Factor enthält, können wir schreiben:

$$\iiint\left[\frac{\partial}{\partial z}(LY) - \frac{\partial}{\partial y}(L\,Z)\right]dx\,.\,dy\,.\,dz$$

Da hierin vollständige Differentiale vorkommen, so können wir dieses Raumintegral nach den Methoden, die wir in § 23 kennen gelernt haben, in ein Oberflächenintegral umformen und erhalten dann:

$$\int\{(L\,Y)\,.\cos c - (L\,Z)\,.\cos b\}\,d\omega$$

worin b, bez. c den Winkel zwischen der auf dem Oberflächenelement $d\omega$ nach aufsen errichteten Normale n und der y-, bez. z-Axe der Coordinaten bezeichnet. Indem wir die anderen Glieder analog umformen, ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} A\,.\iiint\Big[\varepsilon\left(X\frac{\partial X}{\partial t} + Y\frac{\partial Y}{\partial t} + Z\frac{\partial Z}{\partial t}\right) \\ + \mu\left(L\frac{\partial L}{\partial t} + M\frac{\partial M}{\partial t} + N\frac{\partial N}{\partial t}\right)\Big]\,.\,dx\,.\,dy\,.\,dz \\ = \int\{(M\,Z - N\,Y)\,.\cos a + (N X - L\,Z)\,.\cos b \\ + (L\,Y - M X)\,.\cos c\}\,d\omega \end{aligned}\right\}\quad(122\text{a})$$

Wir bekommen also ein Oberflächenintegral, welches über die ganze Oberfläche des betreffenden Körpers auszudehnen wäre, eventuell sogar auch über die unendliche Oberfläche. Auf der linken Seite stehen die Differentialquotienten nach der Zeit von Quadraten der Kräfte; da nun die Grenzen des Integrals nicht von der Zeit abhängen, so können wir die vorgeschriebene Differentiation nach der Zeit, die unter dem Integralzeichen vollführt werden soll, als eine Differentiation des Integralwerthes auffassen, und daher das ganze Integral nach der Zeit differentiiren, nachdem wir unter dem Integralzeichen integrirt haben. Wir erhalten dann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}A\frac{\partial}{\partial t}\iiint\{\varepsilon\,[X^2 + Y^2 + Z^2] + \mu\,[L^2 + M^2 + N^2]\}\,dx\,.\,dy\,.\,dz \\ = \int\{(M\,Z - N\,Y)\cos a + (N X - L\,Z)\cos b \\ + (L\,Y - M X)\cos c\}\,d\omega \end{aligned}\right\}\quad(122\text{b})$$

Diese Gleichung zeigt an, dafs die Summe der quadratischen Gröfsen im ganzen Raume der Zeit nach veränderlich ist, falls an

den Grenzen dieses Raumes das Oberflächenintegral von Null verschieden ist.

Wenn wir uns nun an die oben in § 10 gegebene physikalische Erklärung der Entstehung und Fortpflanzung ebener elektromagnetischer Wellen erinnern, so ergiebt sich, dafs bei denselben die Gleichgewichtsstörung durch das Medium mit einer endlichen Geschwindigkeit fortläuft. Ist sie im Endlichen erregt worden, so gelangt die Welle erst in unendlicher Zeit an die unendlich entfernten Grenzen des Mediums; aber so lange die Welle dort noch nicht angekommen ist, also in jeder endlichen Zeit, ist in der unendlich entfernten Grenze des Mediums noch alles in Ruhe, und es sind dort keine elektrischen oder magnetischen Polarisationen vorhanden. Dann sind aber in diesen unendlich entfernten Theilen alle Kräfte, welche ja der Gröfse der Polarisationen proportional angenommen sind, gleich Null.

Es ist also nach Analogie der ebenen Wellen zu schliefsen, dafs, so lange die erregte Bewegung noch nicht unendlich entfernte Theile des Raumes erreicht hat, d. h. während einer anfänglichen endlichen Zeit, die rechte Seite der Gleichung (122b), und damit auch die linke Seite, d. h. also der Differentialquotient des Raumintegrals nach der Zeit gleich Null ist. Das Integral selbst hat demnach während der Zeit wo die Bewegung ungestört weiter läuft, einen unveränderlichen Werth, und daraus werden wir schliefsen dürfen, dafs die unter dem Integral stehende Summe in der That eine unveränderliche Gröfse repräsentirt, welche durch die Intensität der Bewegung gegeben ist. Sie stellt bis auf einen Zahlenfactor die Energie der elektrischen und magnetischen Bewegung dar, welche erst dann vermindert wird, wenn die Bewegung anfängt, über die Grenzen des Raumes hinaus zu laufen.

Sind leitungsfähige Theile vorhanden, so haben wir zu den linken Seiten der Gleichungen (120) noch je ein Glied hinzuzufügen, dessen Betrag wir ebenso, wie in §§ 25 und 30 ableiten können; nur sind hier die Kräfte an Stelle der Momente getreten.

Wir erhalten dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
4\pi A.\lambda.X + A.\varepsilon.\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\
4\pi A.\lambda.Y + A.\varepsilon.\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\
4\pi A.\lambda.Z + A.\varepsilon.\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \quad (123)$$

Indem wir diese Gleichungen wieder mit X, bez. Y, bez. Z multipliciren und in derselben Weise wie oben mit den Gleichungen (121) zu einem Integral vereinigen, ergiebt sich nunmehr an Stelle der früheren Gleichungen (122a) und (122b), wenn wir berücksichtigen, dafs wir unter der gemachten Annahme für jede endliche Zeit die rechte Seite gleich Null setzen können:

$$A\iiint\Big[4\pi\lambda.(X^2+Y^2+Z^2)+\varepsilon.\Big(X\frac{\partial X}{\partial t}+Y\frac{\partial Y}{\partial t}+Z\frac{\partial Z}{\partial t}\Big) \\ +\mu\Big(L\frac{\partial L}{\partial t}+M\frac{\partial M}{\partial t}+N\frac{\partial N}{\partial t}\Big)\Big].dx.dy.dz=0$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} A\iiint 4\pi\lambda(X^2+Y^2+Z^2).dx.dy.dz+\frac{A}{2}.\frac{\partial}{\partial t}\iiint[\varepsilon(X^2+Y^2+Z^2) \\ \quad +\mu(L^2+M^2+N^2)].dx.dy.dz=0 \end{array}\right\} \quad (124)$$

In diesem Fall würde also der Differentialquotient nach der Zeit, genommen von dem Ausdruck, den wir, abgesehen von einem Zahlenfactor, als Energie aufgefafst haben, nicht gleich Null, die Energie selbst also nicht constant sein, sondern es würde dann auch, ehe noch die Bewegung die unendlich entfernten Grenzen erreicht hat, der negative Werth dieses Differentialquotienten gleich dem stets positiven Werthe des Integrals

$$8\pi\iiint\lambda(X^2+Y^2+Z^2).dx.dy.dz$$

sein. Dividiren wir den ersten Ausdruck durch 8π, so fällt auch in dem Differentialquotienten dieser Factor fort, und es wird dann also die auf die Zeiteinheit und Volumeinheit berechnete Verminderung gleich $\lambda(X^2+Y^2+Z^2)=1/\lambda(u^2+v^2+w^2)$, d. i. gleich dem Widerstande multiplicirt mit dem Quadrat der Stromstärke. Dies ist in der That, wie die Erfahrung lehrt, die Wärmemenge, die durch den elektrischen Strom in der Zeiteinheit und in der Volumeinheit erzeugt wird. Sie ist gleich dem Verlust der auf elektrischer und magnetischer Polarisation beruhender Energie, die wir demnach gleich

$$\frac{1}{8\pi}\iiint[\varepsilon(X^2+Y^2+Z^2)+\mu(L^2+M^2+N^2)]\,dx.dy.dz$$

setzen.

Wir wollen nunmehr wieder zu der Voraussetzung eines isolirenden Mediums zurückkehren, und uns die Oberflächenintegration in Gleichung (122b) nicht über eine unendlich entfernte, sondern über eine endliche Fläche ausgeführt denken.

Wenn wir dann in dem Oberflächenelement $d\omega$ durch die beiden

Resultanten der dort wirkenden magnetischen und elektrischen Kräfte eine Ebene legen, von dem Orte von $d\omega$ aus in ihren entsprechenden Richtungen und Längen diese beiden Resultanten eintragen und sie zu einem Dreieck schliefsen, so sind die Ausdrücke

$$MZ - NY$$
$$NX - LZ$$
und
$$LY - MX$$

gleich dem doppelten Flächeninhalt der Projectionen dieses Dreiecks auf die Coordinatenflächen. Bildet nun die Normale v dieses Dreiecks, dessen Inhalt wir mit D bezeichnen wollen, mit den Coordinatenrichtungen die Winkel α, β, γ so ist

$$\left.\begin{aligned} MZ - NY &= 2D.\cos\alpha \\ NX - LZ &= 2D.\cos\beta \\ \text{und}\quad LY - MX &= 2D.\cos\gamma \end{aligned}\right\} \quad (125)$$

Setzen wir diese Werthe in Gleichung (122b) ein, so wird auf der rechten Seite der mit dem Oberflächenelement $d\omega$ multiplicirte Factor gleich $D(\cos\alpha.\cos a + \cos\beta.\cos b + \cos\gamma.\cos c)$. Wird nun mit (n, v) der Winkel zwischen der Normale n von $d\omega$ und der Normale v des Dreiecks D bezeichnet, so ist

$$\cos(n, v) = \cos\alpha.\cos a + \cos\beta.\cos b + \cos\gamma.\cos c$$

Es ergiebt sich also, dafs der Factor von $d\omega$ gleich ist dem doppelten Flächeninhalte der Projection des Dreiecks D auf die Ebene von $d\omega$. Nun hängt aber am Orte von $d\omega$ die Gröfse des Dreiecks D nur von der Gröfse und Richtung der Kräfte ab, und die Projection wird am gröfsten werden auf eine Ebene, welche der Richtung der beiden Kraftresultanten, also dem Dreieck selbst, parallel ist. Es wird dann das Dreieck auf eine ihm parallele Ebene projicirt, und cos (n, v) hat den Werth 1. Wenn das Dreieck dagegen auf eine Ebene projicirt werden sollte, die darauf senkrecht steht, so würde die Projection Null werden.

Daraus ergiebt sich, dafs der Verlust an Energie der an einer bestimmten Stelle der Oberfläche stattfindet, und welcher durch den Factor von $d\omega$ auf der rechten Seite der Gleichung (122b) ausgedrückt ist, gemessen wird durch die Projection des zwischen den an dieser Stelle bestehenden Kräfteresultanten eingeschlossenen Dreiecks auf die Ebene der Oberfläche, und dafs diese Projection am gröfsten ist, und also am meisten Energie durch diese gegebene Stelle hindurch geht, wenn der betreffende Theil der Oberfläche sowohl der elektrischen wie der magnetischen Kraft parallel ist,

diese beiden Kräfte also in die Tangentialebene der Oberfläche hineinfallen. Der Austritt der Energie aus einem Raume ist also am stärksten, wo die Bewegung an der Grenze auf eine Fläche auftrifft, die den beiden genannten Kräften selbst parallel liegt. Schon Gustav Kirchhoff hat in der älteren Undulationstheorie die Bestimmung der Fortpflanzungsrichtung der Wellen an einer bestimmten Stelle auf diese Beziehung zur Energie gegründet. Er betrachtet als Fortpflanzungsrichtung der Wellen diejenige Richtung, nach welcher die meiste Energie durch die Grenze hindurch geht, so dafs man also hiernach für die elektromagnetische Theorie behaupten kann: Die Fortpflanzungsrichtung der Energie steht in isotropen Medien senkrecht sowohl auf der Richtung der magnetischen Kraft, als auch auf der Richtung der elektrischen Kraft, die im Verlaufe der Bewegung eintreten.

Das Quantum Energie, was in dieser Weise sich fortpflanzt, wird an jeder Stelle gemessen durch den Inhalt jenes zwischen den Kräfteresultanten eingeschlossenen Dreiecks. Wenn man diesen nun als das halbe Product aus der Höhe und Grundlinie berechnet, so hat man dabei zu multipliciren entweder die elektrische Kraft mit derjenigen Componente der magnetischen Kraft, welche senkrecht zu der Richtung der elektrischen Kraft steht, oder die magnetische Kraft mit derjenigen Componente der elektrischen Kraft, welche senkrecht zur magnetischen Kraft steht, so dafs also auf das Resultat nur solche Componenten der beiden Arten von Kräften, der magnetischen und elektrischen Kräfte, Einflufs haben, welche auf einander und gleichzeitig auf der Fortpflanzungsrichtung der Energie senkrecht stehen. Wir haben demnach überall im Raume, soweit sich diese Bewegungen fortpflanzen, die Richtungen der elektrischen Kraft und der magnetischen Kraft und die Fortpflanzungsrichtung der Energie, die wir in ihrem allgemeinsten Sinne nehmen, in den isotropen Körpern als drei nothwendig auf einander senkrecht stehende Richtungen zu unterscheiden.

Dritter Theil.
Kugelförmige Wellen.

Erster Abschnitt.
Integrale der Wellengleichung.

---

§ 33. Die einfachste Form der Kugelwellen.

Nachdem wir im Vorhergehenden die ebenen Transversalwellen als besonderen Fall der Lösung unserer Differentialgleichungen (113) und (116), die wir in die „Wellengleichung“ genannte Form:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 . \Delta \varphi \tag{126}$$

zusammenfassen können, gefunden haben, wollen wir nunmehr weniger specielle Formen der Lösung suchen, und zwar solche, welche uns erlauben, die allgemeinen Integrale daraus zusammenzusetzen. Wir finden sie in den sich kugelförmig ausbreitenden Wellen, welche von einem bestimmten Erregungspunkte aus in den Raum hinein laufen.

Um die Gesetze derselben kennen zu lernen, wollen wir voraussetzen, dafs die Function φ, welche in der allgemeinen Form (126) unserer Differentialgleichungen vorkommt, aufser von der Zeit nur von dem Radius vector r abhängig sei, der von irgend einem festen Punkte, den wir zum Anfangspunkt der Coordinaten nehmen wollen, gerechnet wird. Es stellt dann also φ eine Form der Bewegung dar, welche nach allen Richtungen des Raumes sich gleichmässig ausbreitet.

Für die Function $r . \varphi$ wollen wir ein besonderes Zeichen, nämlich ψ einführen, welches also ebenfalls eine Function von r und t bezeichen wird. Dann ist

$$\varphi = \frac{\psi}{r} \tag{127}$$

Wir haben nun die Differentialquotienten zu bilden, welche in der Gleichung (126) vorkommen. Legen wir den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems xyz in denjenigen Punkt, von dem aus wir r rechnen, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(-\frac{\psi}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) \cdot \frac{x}{r}$$

$$= \left(-\frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) . x \tag{127a}$$

ferner:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \left(-\frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{x^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}\right)$$

$$= -\frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{x^2}{r}\left(\frac{3\psi}{r^4} - \frac{3}{r^3} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right) \tag{127b}$$

Die zweiten Differentialquotienten nach den anderen Coordinaten werden analog gebildet, indem an Stelle von x^2 jetzt y^2 bez. z^2 tritt. Wir können daher gleich die Summe der drei zweiten Differentialquotienten bilden und erhalten:

$$\Delta \varphi = -\frac{3\psi}{r^3} + \frac{3}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r}\left(\frac{3\psi}{r^4} - \frac{3}{r^3} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right)$$

$$= -\frac{3\psi}{r^3} + \frac{3}{r^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + r \cdot \left(\frac{3\psi}{r^4} - \frac{3}{r^3} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \tag{128}$$

Da in dem Werthe von φ nur der Zähler von der Zeit abhängt, so ist der zweite Differentialquotient nach der Zeit

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \tag{129}$$

Setzen wir nun diese Werthe in Gleichung (126) ein, so ergiebt sich:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{a^2}{r} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \tag{130}$$

Ist r von Null verschieden, so können wir auf beiden Seiten mit r multipliciren und erhalten

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a^2 . \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \tag{131}$$

In jedem Falle bedarf es nun noch einer besonderen Untersuchung, ob diese Gleichung auch im Punkte $r = 0$ gültig ist.

Diese Gleichung (131) hat dieselbe Form, wie wir sie früher für die ebenen Wellen gefunden haben. Nur ist hier der Radius r an Stelle einer der Coordinaten x, y oder z getreten. Auf der einen Seite steht der zweite Differentialquotient nach der Zeit, auf der anderen der zweite Differentialquotient nach einer Länge, und wir können aus unseren früheren Ergebnissen schliefsen, dafs wir eine Lösung dieser Gleichung erhalten, wenn wir ψ gleich einer Function von $r + at$ oder $r - at$ setzen, also

$$\psi = F_{(r \pm at)} \tag{132}$$

und daraus folgt:

$$\varphi = \frac{1}{r} \cdot F_{(r \pm at)} \tag{132a}$$

Nun würde eine Function von $r - at$ Wellen anzeigen, welche in der Richtung von r mit der Geschwindigkeit a fortlaufen, so dafs also diese Lösung Wellen darstellt, welche in der Richtung der wachsenden Werthe von r, d. h. nach allen Seiten vom Erregungspunkte aus sich mit constanter Geschwindigkeit fortpflanzen. Soweit der Factor $F_{(r - at)}$ in Betracht kommt, würden die Phasenzustände in der weiterlaufenden Welle sich unverändert wiederholen; nun wird aber der zweite Factor, $\frac{1}{r}$, kleiner und kleiner, je gröfser r wird, so dafs wir es also mit Wellen zu thun haben, die immer kleinere Amplitude bekommen, je weiter sie von dem Erregungspunkte sich entfernen, und zwar nimmt ihre Amplitude umgekehrt proportional r ab.

Andererseits würden Functionen von $r + at$, welche ja auch zulässig sind, Wellen anzeigen, die von gröfseren Werthen von r gegen den Mittelpunkt, d. h. gegen den Punkt $r = 0$ hinlaufen und schliefslich im Mittelpunkte ankommen.

In diesem Punkte aber ist, wie wir schon wissen, unsere Lösung nicht ohne weiteres gültig. Wir werden untersuchen müssen, in welcher Art die Wellen dort unendlich werden, und dazu wird nöthig sein, dafs wir zunächst die Form der Wellen für sehr kleine Werthe von r untersuchen. Wenn sich dann zeigt, dafs für diese die Elongationen endlich bleiben, dann werden wir dies auch für $r = 0$ schliefsen dürfen. Es ist sofort ersichtlich, dafs ein einfaches System von Wellen, die etwa gegen den Mittelpunkt zusammenlaufen, allein hier keinen endlichen Werth geben kann; denn der Werth von $F_{(r \pm at)}$ kann nicht in demselben Mafse dauernd verschwindend klein werden,

wie r. Wir werden aber später finden, dafs, wenn zwei Wellensysteme bestehen, von denen das eine von dem Mittelpunkte ausläuft, das andere in den Mittelpunkt hinein, in der That continuirliche und endliche Zustände im Mittelpunkt eintreten können.

§ 34. Zusammengesetzte Formen der Kugelwellen.

Die Differentialgleichung (126), von der wir ausgegangen sind, ist linear und homogen. Da in ihr die zweiten Differentialquotienten von φ sowohl nach den Coordinaten als nach der Zeit vorkommen, so ist eine Lösung nur dann für uns von Werth, wenn diese Differentialquotienten gebildet werden können und einen physikalischen Sinn haben. Werden sie an einer bestimmten Stelle unendlich, so

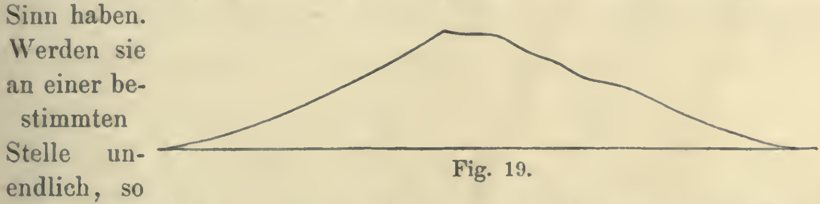


Fig. 19.

zeigt das im Allgemeinen eine Discontinuität der ersten Differentialquotienten an, aber wir würden dieses doch immer noch als Uebergang aus einer continuirlichen Function betrachten können. Es kann ja z. B. eine continuirliche Function, die wir uns in Fig. 19 als Ordinaten aufgetragen denken, irgendwo eine Ecke bilden. Dann würde an dieser

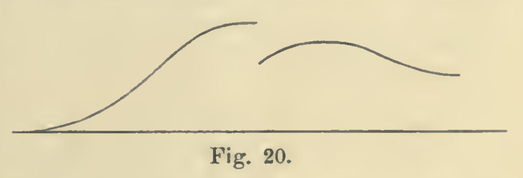


Fig. 20.

Stelle der erste Differentialquotient einen Sprung machen und der zweite Differentialquotient würde keinen Sinn haben. Man würde aber untersuchen müssen, ob man die Ecke als einen Uebergang aus einer immer mehr der Ecke sich nähernden Rundung betrachten darf. Ist dies möglich, so kann man solche Fälle oftmals noch zulassen, wenn auch im Allgemeinen die zweiten Differentialquotienten endlich sein müssen. Wenn aber die Function selbst an einer Stelle eine plötzliche Aenderung erleidet, Fig. 20, so würde dort schon der erste Differentialquotient unendlich werden, und der zweite gar nicht mehr ermittelt werden können. In diesem Falle könnte unsere Differentialgleichung nicht angewendet werden. Wir werden später sehen, dafs man die Flächen, an denen die Differentialquotienten unendlich werden, als Grenzflächen behandeln und dadurch die Bedingung der Continuität der Function φ umgehen kann. Abgesehen

von diesen Einschränkungen kann die Function φ und damit auch die Function F vollkommen willkürlich sein.

Wenn man nun eine solche homogene lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten hat, so kann man neue Differentialgleichungen daraus bilden, indem man sie nach x oder nach y oder z oder t differentiirt. Differentiiren wir z. B. nach x, so können wir die dadurch entstehende Differentialgleichung, da bei continuirlichen Functionen die Ordnung der Differentiationen vertauscht werden kann, schreiben:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = a^2 . \Delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \tag{133}$$

Es ist dann $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ auch eine Function, welche unserer Differentialgleichung (126) genügt, und dasselbe gilt von den Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}$. Da diese nun Lösungen unserer Differentialgleichung sind, so kann man sie wieder nach x, y, z, t differentiiren, und bekommt dadurch die zweiten Differentialquotienten als weitere Lösungen. In dieser Weise kann man zu beliebig hohen Differentialquotienten fortschreiten. Dabei ist nur darauf zu achten, dass von den Differentialquotienten, die man als Lösungen der Gleichung nimmt, auch immer noch der nächste und zweitnächste Differentialquotient gebildet werden kann. In der Beziehung ist also das Verfahren beschränkt, und wenn wir eine Function haben, welche nach irgend einer Anzahl von Differentiationen discontinuirliche Differentialquotienten giebt, so würde darin eine Grenze liegen für die Reihe der Differentialquotienten, die wir als neue Lösungen der Differentialgleichung für F benutzen können.

Werden die Differentialquotienten von φ als Lösungen verwendet, so besteht für die Amplitude der Wellen ausser der Abhängigkeit von der Grösse des Radius vector noch eine andere Abhängigkeit. Für den Differentialquotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ wird der Cosinus des Winkels α zwischen r und der Richtung der x-Axe überall als Factor auftreten; denn wenn wir in Gleichung (127a) x durch seinen Werth $r . \cos\alpha$ ersetzen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left(-\frac{\psi}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r}\right) . \cos\alpha \tag{134}$$

Nun ist aber der Werth von $\cos\alpha$ auf der einen Seite der Kugel positiv, auf der anderen negativ, und dazwischen liegt eine Aequa-

torialzone, in welcher er gleich Null ist. Es würde sich also ergeben, dafs auf der einen Kugelhälfte stets die entgegengesetzten Bewegungen stattfinden, wie auf der anderen, und dafs beide Kugelhälften durch eine Ebene getrennt sind, für welche der Werth von φ gleich Null ist, also keine Bewegung stattfindet. Die Amplitude nimmt von den Polen, d. h. den beiden Schnittpunkten der x-Axe mit der Kugelfläche nach der Aequatorialebene hin stetig ab.

Nehmen wir als Lösung den zweiten Differentialquotienten von φ nach x, dann erhalten wir aus Gleichung (127b), indem wir wieder für x den Werth $r.\cos\alpha$ einsetzen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r} + \Big(\frac{3\psi}{r^3} - \frac{3}{r^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}\\ + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\Big).\cos^2\alpha\end{aligned}\right\}\quad(135)$$

Wir haben also erstens ein nur von r abhängiges Glied, welches eine Bewegung darstellt, die sich nach allen Richtungen gleichmäfsig fortpflanzt, und ein zweites Glied, welches mit $\cos^2\alpha$ multiplicirt ist, also eine Bewegung repräsentirt, die sowohl in Richtung der positiven als auch der negativen x-Axe positive Werthe hat, dazwischen liegt aber eine Aequatorialzone, in der $\cos^2\alpha = 0$ wird, und die von diesem Factor freien Glieder allein übrig bleiben. Durch die Lösung $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$ wird demnach eine Bewegung angezeigt, die als aus zwei Bewegungen superponirt angesehen werden kann: die eine Bewegung läuft nach allen Richtungen gleichmässig aus, die andere aber ist Null in der yz-Ebene und nimmt nach beiden Polen hin symmetrisch zu; in der Aequatorialzone herrscht die erste Art der Bewegung vor, gegen beide Pole hin überwiegt dagegen für gröfsere Werthe von r die zweite Form.

Man kann nun, indem man in dieser Weise weitergeht und höhere Differentialquotienten bildet, und zwar bald nach x, bald nach y u. s. w. zu immer zusammengesetzteren Formen kommen. Wenn wir z. B. $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}$ bilden, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = \frac{x.y}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{\psi}{r^3} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)\quad(136)$$

Bezeichnen wir mit α ebenso wie früher die Poldistanz und mit θ den Winkel zwischen dem Meridian des betreffenden Punktes und

der xy-Ebene, also gleichsam die geographische Länge auf der Wellenfläche, so ist

$$x \, . \, y = r^2 \, . \cos \alpha \, . \sin \alpha \, . \cos \theta$$

und es würde dadurch eine andere, viel verwickeltere Vertheilung der Kugelwellen angezeigt sein. Es ist nun leicht zu erkennen, dafs bei jeder weiteren Differentiation die Factoren immer höhere Dimension bekommen, und wir immer complicirtere Functionen der Winkel erhalten.

Abnahme der Amplitude bei wachsendem r. Die Function ψ behält gleich grosse Phasen, während diese für die Wellenbewegung selbst, welche ja durch φ dargestellt wird, abnehmen; im einfachsten Fall hatten wir gefunden wie $\frac{1}{r}$. Wenn wir aber $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ als Lösung nahmen, so erhielten wir (Gleichung 134):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \left[- \frac{\psi}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] . \cos \alpha$$

Die Bewegung setzt sich also zusammen aus zwei Gliedern, von denen das erste abnimmt wie $\frac{1}{r}$, das andere aber schneller, nämlich wie $\frac{1}{r^2}$. Ist der zweite Differentialquotient von φ, also $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, die Lösung, so haben wir (Gleichung 135) r^3, r^2 und r als Nenner der verschiedenen Glieder, und es ergiebt sich ebenso wie vorhin, dafs der höchste Differentialquotient von ψ mit $\frac{1}{r}$ multiplicirt ist. Dieses ist nun auch bei weiteren Differentiationen der Fall; denn das letzte Glied wird immer nur dadurch verändert, dafs die Differentiation an der Gröfse ψ selbst auszuführen ist, wodurch also immer höhere Differentialquotienten von ψ hinein kommen, während der Factor, der von r allein abhängig ist, durch diese letzte Differentiation nicht verändert wird. Es kann dieses Glied aber mit soviel Winkelfunctionen $\cos \alpha$, oder $\sin \alpha \, . \cos \theta$, beziehlich $\sin \alpha \, . \sin \theta$ multiplicirt sein, als der Grad des Differentialquotienten beträgt, so dafs für dieses höchste Glied eine immer mannigfachere Theilung der Kugeloberfläche eintritt. Es ist aber stets dasjenige, gegen welches in gröfserer Entfernung die anderen Glieder, welche höhere Potenzen von r im Nenner haben, und in verhältnifsmäfsig stärkerer Weise abnehmen, verschwinden.

Im Allgemeinen kann also durch eine Zusammensetzung solcher verschiedenen Formen bewirkt werden, dafs man in sehr grofser

Entfernung ungemein mannigfaltige Theilungen der Kugeloberfläche in Felder mit abwechselnd positiven und negativen radialen oder auch tangentialen Bewegungen erhalten kann. Wir wollen eine solche Winkelfunction n^{ten} Grades mit P_n bezeichen; dann ist $\frac{1}{r} \cdot P_n \cdot \frac{\partial^n \frac{\psi}{r}}{\partial r^n}$ die allgemeine Form des in sehr grossen Entfernungen allein stehen bleibenden Gliedes.

Bei sehr grossen Entfernungen werden nun aber Stücke der Kugelfläche von endlicher Ausdehnung schliefslich als eben betrachtet werden können, und es läfst sich durch die Entwickelung dieser Winkelfunction P_n, welche in der Lehre von den sogenannten Kugelfunctionen als ein Theil der Potentialtheorie behandelt zu werden pflegt, zeigen, dafs in sehr grofser Entfernung in einer gegebenen begrenzten Ebene alle möglichen Vertheilungen von positiven und negativen Wellenamplituden durch eine solche von einem entfernten Mittelpunkte ausgehende Wellenbewegung entstehen können.

Während man also diese Glieder mit höheren Potenzen von r in grofser Entfernung vernachlässigen kann, müssen sie berücksichtigt werden, wenn man die Bewegung in der Nähe des Mittelpunktes, von dem die Welle ausgegangen ist, untersuchen will.

Zweiter Abschnitt.

Beziehungen zwischen den elektrischen und magnetischen kugelförmigen Wellen.

---

§ 35. Die allgemeinen Gleichungen für gleichzeitig bestehende elektrische und magnetische Wellensysteme.

Wir haben bisher Lösungen für φ gesucht, ohne weiter nach ihrer physikalischen Bedeutung zu fragen und den Zusammenhang zu berücksichtigen, welchen verschiedene Functionen dieser Art unter einander haben müssen.

Nach den von uns gemachten Festsetzungen können sowohl die elektrischen Kräfte und Momente, als auch die magnetischen durch die Function φ dargestellt werden. Es besteht nun aber ein bestimmter Zusammenhang zwischen den magnetischen und elektrischen Oscillationen, den wir noch auffinden müssen, und wir

wollen nunmehr untersuchen, wie beide neben einander vor sich gehen. Zu diesem Zwecke ist es nothwendig, auf unsere ersten Gleichungen, die MAXWELL'schen Grundgleichungen, zurückzugreifen. Dabei wollen wir voraussetzen, dafs innerhalb desjenigen Raumes, für den wir unsere Bewegungsgleichungen bilden, die dielektrische sowohl wie die magnetische Constante überall den gleichen Werth habe und auch unabhängig von den Richtungen sei, d. h. wir wollen die Fortpflanzung der Bewegung in einem mit homogener und isotroper Substanz gefüllten Raume untersuchen. Dann können wir in den Gleichungen (49) ε als constanten Factor vor die Differentialquotienten setzen und erhalten

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} \\ A\varepsilon\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} \\ \text{und} \quad A\varepsilon\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (137)$$

Die analoge Reihe der Gleichungen lautet unter der entsprechenden Voraussetzung, dafs μ eine Constante ist,

$$\left.\begin{aligned} A\mu\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} \\ A\mu\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} \\ \text{und} \quad A\mu\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (138)$$

Diese Gleichungen sprechen also bestimmte Beziehungen zwischen den magnetischen und elektrischen Momenten aus.

Wir wollen nun einmal annehmen, dafs wir die elektrischen Gröfsen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gefunden hätten. Wir wissen dann schon, dafs

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}\right] = 0 \quad (139)$$

oder dafs der Werth dieser Summe eine der Zeit nach constante Gröfse ist; das Letztere zeigt an, dafs ein bestimmtes Quantum fest haftender Elektricität an einer bestimmten Stelle des isolirenden Raumes liegt und an den Aetherschwingungen nicht weiter Theil nimmt, und wir uns also bei der Untersuchung der Schwingungen nicht weiter darum zu bekümmern brauchen. Wir können

daher stets unsere Schlüsse über die Theorie der Lichtbewegung unter der Voraussetzung machen, dafs

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 0 \tag{139a}$$

ist; denn was weiter hinzu kommen würde, wäre nur eine von der Zeit unabhängige Function der Coordinaten, die keinen Einflufs auf die Oscillationen hat.

Als wir in § 16 Lösungen für die MAXWELL'schen Gleichungen suchten, fanden wir, dafs sich die Functionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ ausdrücken liefsen in der Form:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial x}\\
\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial y}\\
\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\partial \psi}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{140}$$

worin U, V, W und ψ Functionen der Coordinaten bezeichneten, die wir später aber auch als Functionen der Zeit betrachten wollten. Wir hatten damals gesehen, dafs wir, ohne die Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ zu verändern, diese Functionen U, V, W auch so bestimmen können, dafs

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

ist. Dann hatten wir schon gesehen, dafs unter diesen Umständen

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\Delta\psi$$

war, und wenn also festgesetzt wird, dafs die Gleichung (139a) erfüllt ist, so ergiebt sich daraus unmittelbar, dafs

$$\Delta\psi = 0 \tag{141}$$

ist. Wir haben nun auch schon gesehen, dafs, wenn diese Gleichung ausnahmslos gültig ist, und ψ in unendlicher Entfernung wie $\frac{1}{r}$ abnimmt, die Function ψ im ganzen Raume gleich Null sein mufs. Es ist somit

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\end{aligned}\right\} \quad (142)$$

Wenn wir also ψ in den Werthen für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ (Gleichungen 140) ganz weglassen, so ist dadurch in der That bedingt, dafs die wahre Dichtigkeit der Elektricität in dem ganzen Raume gleich Null ist; wie sich sofort ergiebt, wenn wir aus den Gleichungen (142) die Werthe für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ in die Gleichung (139a) einsetzen.

Ebenso wie früher (Gleichung 53) ist dann auch hier

$$A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = - \Delta U. \quad (143)$$

Da nun die elektrischen Momente $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Wellengleichung erfüllen sollen, so wird dieses am einfachsten erreicht, indem jeder der Factoren U, V, W der Wellengleichung entspricht. Die andere Bedingung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

steht mit der Wellengleichung nicht im Widerspruch, sondern wird gleichzeitig erfüllt werden. Es ist dann:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 . \Delta U \quad (144)$$

und dadurch verwandelt sich Gleichung (143) in:

$$A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (143a)$$

Andererseits hatten wir schon gefunden (Gleichung 41), dafs, wenn a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen bezeichnet,

$$\frac{1}{a^2} = A^2 . \mu . \varepsilon$$

ist, und dadurch ergiebt sich

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = - A . \mu . \varepsilon . \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (143b)$$

Durch Integration erhalten wir:

$$\mathfrak{L} = - A . \mu . \varepsilon . \frac{\partial U}{\partial t} + \Phi_{(x,\, y,\, z)} \quad (143c)$$

worin $\Phi_{(x, y, z)}$ eine beliebige Function der Coordinaten bezeichnet. Es würde aber ein von Null verschiedener Werth von $\Phi_{(x, y, z)}$ nur anzeigen, dafs eine gewisse constante Magnetisirung vorhanden ist. Berücksichtigen wir nun ausschliefslich die veränderlichen Momente, so sind diese vollständig dargestellt durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L} &= -A.\mu.\varepsilon.\frac{\partial U}{\partial t} \\ \mathfrak{M} &= -A.\mu.\varepsilon.\frac{\partial V}{\partial t} \\ \mathfrak{N} &= -A.\mu.\varepsilon.\frac{\partial W}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (145)$$

Wenn wir also unsere Gröfsen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ in der Form der Gleichungen (142) darstellen und passende Functionen U, V, W gefunden haben, dann bekommen wir die zugehörigen magnetischen Momente unmittelbar dadurch, dafs wir sie den nach der Zeit genommenen Differentialquotienten von U, V, W, mit $-A.\mu.\varepsilon$ multiplicirt, gleichsetzen, so dafs also auf diese Weise die zu den veränderlichen elektrischen Momenten gehörigen magnetischen Momente ebenfalls gegeben sind.

§ 36. Die einfachste Form gleichzeitig vorhandener elektrischer und magnetischer Wellen.

Nunmehr gehen wir zur Untersuchung derjenigen Wellenformen über, welche bestehen, wenn sich gleichzeitig elektrische und magnetische Oscillationen von demselben Mittelpunkt aus verbreiten.

Wir wollen zu diesem Zwecke möglichst einfache Annahmen über U, V und W machen, wobei wir natürlich berücksichtigen müssen, dafs

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

sein mufs. Diese Gleichung ist erfüllt, wenn wir

$$\left.\begin{aligned} U &= 0 \\ V &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ W &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (146)$$

setzen, wo φ eine Function bezeichnet, die der Wellengleichung (126)

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2.\Delta\varphi$$

genügt und nur von t und $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ abhängen soll. Dann ergiebt sich zufolge unserer Gleichungen (142)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \end{aligned}\right\} \tag{147}$$

und ferner zufolge unserer Gleichungen (145):

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L} &= 0 \\ \mathfrak{M} &= - A . \mu . \varepsilon . \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z \partial t} \\ \mathfrak{N} &= \quad A . \mu . \varepsilon . \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial t} \end{aligned}\right\} \tag{148}$$

Führen wir die Differentiationen aus, so erhalten wir für die elektrischen Momente

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{y^2 + z^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= - x . \frac{y}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= - x . \frac{z}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \end{aligned}\right\} \tag{147 a}$$

und für die magnetischen Momente

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L} &= 0 \\ \mathfrak{M} &= - A . \mu . \varepsilon . \frac{z}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \\ \mathfrak{N} &= \quad A . \mu . \varepsilon . \frac{y}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \end{aligned}\right\} \tag{148 a}$$

Für die magnetischen Schwingungen folgt hieraus:

$$\mathfrak{L} . x + \mathfrak{M} . y + \mathfrak{N} . z = 0 \tag{149}$$

oder

$$\mathfrak{M} . y + \mathfrak{N} . z = 0 \tag{149 a}$$

Die Richtung der magnetischen Oscillationen steht also senkrecht auf dem Radius r. Da aber keine Componente vorhanden ist, welche in die Richtung der x-Axe fällt, so geschehen die Verschiebungen in Richtung der Parallelkreise.

Ihre Gröfse ist gegeben durch den Werth

$$\sqrt{\mathfrak{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2} = A \,.\, \mu \,.\, \varepsilon \,.\, \frac{\sqrt{y^2 + z^2}}{r} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \,.\, \partial t} \tag{150}$$

Nun ist aber $\sqrt{y^2 + z^2}$ gleich dem Radius des betreffenden Parallelkreises, so dafs also die Oscillationen in einer gemeinsamen Winkelverschiebung der ganzen mit Nord- bez. Südmagnetismus belegten Kugelschale um die x-Axe bestehen. Ihre lineare Gröfse ist demnach an den Polen gleich Null und erreicht am Aequator ein Maximum.

Aus den Werthen für die elektrischen und magnetischen Momente (Gleichungen 147a und 148a) ergiebt sich ferner:

$$\mathfrak{X} \,.\, \mathfrak{L} + \mathfrak{Y} \,.\, \mathfrak{M} + \mathfrak{Z} \,.\, \mathfrak{N} = 0 \tag{151}$$

Diese Gleichung sagt aus, dafs die Richtungen der magnetischen und elektrischen Oscillationen bei der Lichtbewegung auf einander senkrecht sind.

Wenn wir nun in dem Werthe von $\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}$ zunächst nur das zweite Glied berücksichtigen und

$$\frac{\mathfrak{X}_1}{\varepsilon} = \frac{y^2 + z^2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \tag{152}$$

setzen, so besteht die Gleichung

$$\mathfrak{X}_1 \,.\, \mathfrak{L} + \mathfrak{Y} \,.\, \mathfrak{M} + \mathfrak{Z} \,.\, \mathfrak{N} = 0, \tag{153}$$

aus welcher hervorgeht, dafs die Resultante der Componenten $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$, die also nur einen Theil der gesammten elektrischen Verschiebung bildet, auf der Richtung der magnetischen Oscillationen, den Parallelkreisen, senkrecht steht. Ferner ist aber

$$x \,.\, \mathfrak{X}_1 + y \,.\, \mathfrak{Y} + z \,.\, \mathfrak{Z} = 0 \tag{154}$$

so dafs jene Resultante also auch auf dem Radius senkrecht steht. Beides ist aber zugleich nur möglich, wenn ihre Richtung mit der Richtung der Meridiane zusammenfällt.

Die Gröfse dieser Verschiebung ist:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\mathfrak{X}_1{}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2} &= \frac{\sqrt{y^4 + 2 z^2 y^2 + z^4 + x^2 y^2 + x^2 z^2}}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \\
&= \sqrt{\frac{(x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2)}{r^2}} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \\
&= \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)
\end{aligned} \tag{155}$$

Sie ist demnach auf derselben Kugelschale an jeder Stelle der dort vorhandenen magnetischen Verschiebung proportional.

Das bisher in dem Werthe von $\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}$ nicht berücksichtigte Glied $\frac{2}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ stellt eine auf der ganzen Kugelschale gleichmäfsige Verschiebung in der x-Richtung dar, so dafs sich also die gesammte elektrische Verschiebung zusammensetzt aus

1. einer Verschiebung in der Richtung der Meridiane, deren Gröfse an jeder Stelle dem Lothe auf die Axe (nach unserer Annahme auf die x-Axe) proportional ist, und

2. einer Verschiebung in der Richtung der Axe, die auf der ganzen Kugelfläche gleiche Gröfse hat.

Wegen der Symmetrie der Gleichungen können wir nun die Gleichung, welche wir bisher auf die elektrischen Verschiebungen angewendet haben, auch auf die magnetischen Verschiebungen übertragen und umgekehrt. Es würden dann die elektrischen Schwingungen in Parallelkreisen verlaufen, und die magnetischen Schwingungen theils in Richtung der Meridiane geschehen, theils der x-Axe parallel sein.

Die beiden Bewegungsformen, welche hier stets mit einander verbunden auftreten, kommen bei den elastischen Schwingungen getrennt von einander vor. Wenn man bei diesen die einfachsten Formen kugelförmig sich ausbreitender Wellen sucht, so findet man erstens, dafs jede Kugelschicht, als wäre sie vollkommen starr, kreisende Bewegungen als Ganzes um eine beliebige Axe ausführen kann. Zweitens ist eine Bewegung in Richtung der Meridiane möglich; aber da hierbei eine Bewegung nach einem Pol hin stattfindet, wird dort die Masse der elastischen Substanz zusammengedrängt und, indem diese ausweicht, entsteht gleichzeitig eine Bewegung in Richtung der Axe.

§ 37. Elektromagnetische Kugelwellen mit sehr grossem Radius.

Die bisher besprochenen Formen der elektrischen und magnetischen Schwingungen beziehen sich auf den Fall, dafs der Radius der Kugelschale einen endlichen Werth hat.

Indem wir nun zu Kugeln mit sehr grofsem Radius übergehen, wollen wir zunächst die Winkel zwischen dem Radius r und der positiven Richtung der Coordinataxen einführen. Wir bezeichnen sie mit α, β und γ; dann ist:

und

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x}{r}\\ \cos\beta &= \frac{y}{r}\\ \cos\gamma &= \frac{z}{r}\end{aligned}\right\}\quad(156)$$

Mit Benutzung dieser Werthe erhalten unsere Gleichungen (148a) die Form

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{L} &= 0\\ \mathfrak{M} &= -A.\mu.\varepsilon.\cos\gamma.\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial t}\\ \mathfrak{N} &= A.\mu.\varepsilon.\cos\beta.\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial t}\end{aligned}\right\}\quad(157)$$

und unsere Gleichungen (147a)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{2}{r}.\frac{\partial\varphi}{\partial r} + (\cos^2\beta+\cos^2\gamma).r.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= -\cos\alpha.\cos\beta.r.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)\\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= -\cos\alpha.\cos\gamma.r.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}.\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right).\end{aligned}\right\}\quad(158)$$

Wir haben nun oben in § 33 gesehen, dafs bei Kugelwellen

$$\varphi = \frac{1}{r}.\psi$$

zu setzen ist, wo ψ eine beliebige Function von $r \pm at$ bezeichnet.

Benutzen wir diesen Werth und führen die Differentiationen etwas weiter aus, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{L} &= 0.\\ \mathfrak{M} &= -A.\mu.\varepsilon.\cos\gamma.\left(-\frac{1}{r^2}.\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{r}.\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t}\right)\\ \mathfrak{N} &= A.\mu.\varepsilon.\cos\beta.\left(-\frac{1}{r^2}.\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{1}{r}.\frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t}\right)\end{aligned}\right\}\quad(157a)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= -\frac{2}{r^3}.\psi+\frac{2}{r^2}.\frac{\partial\psi}{\partial r}+(\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\left(\frac{3}{r^3}.\psi-\frac{3}{r^2}.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= -\cos\alpha.\cos\beta.\left(\frac{3}{r^3}.\psi-\frac{3}{r^2}.\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r}.\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= -\cos\alpha.\cos\gamma.\left(\frac{3}{r^3}.\psi-\frac{3}{r^2}.\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r}.\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right)\end{aligned}\right\}\quad(158a)$$

Wird der Radius der Kugel nun sehr grofs, so brauchen wir nur diejenigen Glieder, welche den Factor $\frac{1}{r}$ enthalten, zu berücksichtigen, so dafs also

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L} &= 0 \\ \mathfrak{M} &= -A \,.\, \mu \,.\, \varepsilon \,.\, \cos\gamma \,.\, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t} \\ \mathfrak{N} &= A \,.\, \mu \,.\, \varepsilon \,.\, \cos\beta \,.\, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial r\,\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (157\text{b})$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= (\cos^2\beta + \cos^2\gamma) \,.\, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= -\cos\alpha \,.\, \cos\beta \,.\, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= -\cos\alpha \,.\, \cos\gamma \,.\, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \end{aligned}\right\} \quad (158\text{b})$$

zu setzen ist.

Indem wir in diese Gleichungen (157b und 158b) nun wiederum die Werthe für die Winkelfunction (Gleichungen 156) einführen, ergiebt sich aus einer der im vorigen Paragraphen angestellten völlig analogen Discussion, dafs die Resultante der magnetischen Verschiebungen in die Richtung der Parallelkreise und diejenige der elektrischen in die Richtung der Meridiane fällt. Bei den letzteren ist also durch den Uebergang zu unendlich grofsen Kugelschalen die Componente weggefallen, welche auf der ganzen Kugelschale dieselbe Gröfse hat und der x-Axe parallel ist.

Es vollziehen sich demnach hier alle Oscillationen in der Oberfläche der Kugelschale, und ihre Gröfse ist der Entfernung r von ihrem Erregungspunkt umgekehrt proportional.

In unendlich grofsen Entfernungen gehen nun begrenzte Kugelstücke in Ebenen über, und wir haben dann ebene Wellen, welche zwei senkrecht zu einander und senkrecht zur Richtung ihrer Fortpflanzung vor sich gehende Schwingungen enthalten. Es ist also die Möglichkeit polarisirter Strahlen durch diese einfachste Form der Bewegung bereits gegeben.

Dritter Abschnitt.

Das Huyghens'sche Princip.

§ 38. Die Bedeutung des Huyghens'schen Princips.

Wenn der Aether aus seiner Gleichgewichtslage abgelenkt ist, oder wenn, wie bei den Lichtschwingungen, in ihm die magnetischen und elektrischen Momente verändert sind, so wird dieser veränderte Zustand sich irgendwie ausgleichen und damit weitergehende Störungen verursachen, deren Verlauf von dem Anfangszustande abhängt. Denken wir uns nun andererseits den Aether begrenzt, und nehmen wir an, dafs an irgend welchen Grenzflächen, Grenzlinien oder Grenzpunkten während der Zeit, wo jene Bewegung abläuft, noch äufsere Einwirkungen auf die Grenzflächen stattfinden, so werden diese weitere Abänderungen der bestehenden Bewegung hervorbringen. Alle diese Einwirkungen und die durch sie verursachten Bewegungen können sich nun, wie schon früher hervorgehoben wurde, superponiren, weil die Differentialgleichungen, die sich auf die hier bestehende Bewegung beziehen, linear und homogen sind.

Wir müssen zunächst zeigen, dafs die Integrationsformen, welche wir bisher gefunden haben, wirklich auch dem allgemeinsten Falle genügen, und dafs wir eine beliebige Wellenbewegung, welche in einem Raume vor sich geht, allgemein als Superposition einer Reihe von kugeligen Wellen betrachten können, deren jede von einem Mittelpunkte ausgeht, beziehlich von Gruppen einander sehr nahe gelegener Erregungspunkte positiver und negativer Art, deren Wellenpotentiale wir durch Differentiation des Ausdruckes $\frac{1}{r} \cdot \psi_{(r \mp at)}$ nach den Coordinaten schon bilden gelernt haben.

Gleichartige Erregungspunkte können wir uns namentlich an Flächen in einfacher Schicht continuirlich angelagert denken. Neben solchen spielen noch eine wichtige Rolle die Doppelschichten, welche als durch zwei Schichten von Erregungspunkten gebildet angesehen werden können, von denen die eine positiv ist, die andere negativ, und welche normal in verschwindend kleinen Abständen dN von der betreffenden Fläche abstehen, so dafs auf beiden Seiten jedes Flächenelements $d\omega$ gleiche Mengen entgegengesetzter Erregungscentra vorkommen.

Dieses Princip der Zerlegung bestehender Wellensysteme ist zuerst von HUYGHENS gebraucht worden und wird deshalb vielfach als HUYGHENS'sches Princip bezeichnet. Es hat seinen besonders grofsen Nutzen in der Lehre von der Diffraction des Lichtes entfaltet.

§ 39. Die Ableitung des Huyghens'schen Principes.

Um den Beweis für die Richtigkeit des HUYGHENS'schen Principes durchzuführen, müssen wir den GREEN'schen Satz verallgemeinern, indem wir ein viertes auf die Zeit bezügliches Glied hinzufügen. Wir gehen hierbei aus von einem Integral, das demjenigen analog ist, welches wir der Ableitung des GREEN'schen Satzes zu Grunde legten. Es soll sich ebenso wie damals über einen abgegrenzten Raum erstrecken, in dessen Innern in einem Punkte eine Unstetigkeit stattfindet. Dieser Integrationsraum soll sich aber auch unter Umständen in den unendlichen Raum erweitern können. Aufserdem soll aber hier nach der Zeit integrirt werden, und zwar von einer bestimmten Anfangszeit t_0 bis zu einer bestimmten Endzeit t_1. Das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} d\,t \iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} dx \,.\, dy . dz$$

können wir durch partielle Integration umformen, vorausgesetzt, dafs dieselben Bedingungen der Continuität für die Functionen selbst und ihre ersten und zweiten Differentialquotienten eingehalten sind, die wir schon früher in § 23 erörtert haben. Indem wir die partielle Integration nach den Coordinaten x, y, z für die drei ersten Glieder ausführen, erhalten wir für dieselben nach dem GREEN'schen Satze:

$$\left. \begin{aligned} &\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\} . dx . dy . dz \\ &= - \int_{t_0}^{t_1} dt \int d\omega \frac{\partial \varphi}{\partial N} . \psi - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \psi . \Delta \varphi . dx . dy . dz \end{aligned} \right\} \quad (159)$$

Das letzte Glied unseres Integrals wollen wir nun ebenfalls partiell nach der Zeit integriren, und es ergiebt sich dann für dasselbe

$$\begin{aligned} &- \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot dx . dy . dz \\ &= - \frac{1}{a^2} \iiint \overline{\underline{\psi . \frac{\partial \varphi}{\partial t}}} . dx . dy . dz + \frac{1}{a^2} \int dt \iiint \psi . \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} . dx . dy . dz \quad (160) \end{aligned}$$

Wir bekommen also die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} dx.dy.dz \\
&= - \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int d\omega . \frac{\partial \varphi}{\partial N} . \psi - \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \iiint \psi . \varDelta \varphi . dx.dy.dz \\
&\qquad - \frac{1}{a^2} \iiint \overline{\underline{\psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}}} \cdot dx.dy.dz \\
&\qquad + \frac{1}{a^2} \int dt \iiint \psi \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \cdot dx.dy.dz
\end{aligned}\right\} \quad (161)$$

Bei dieser Umformung haben wir die Differentialquotienten von ψ integrirt; wir können nun ein völlig analoges Verfahren einschlagen, indem wir die Differentialquotienten von φ integriren. Es ergiebt sich dann:

$$\left.\begin{aligned}
&\int\limits_{t_0}^{t_1} dt \iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\} dx.dy.dz \\
&= - \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int d\omega . \frac{\partial \psi}{\partial N} . \varphi - \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \iiint \varphi . \varDelta \psi . dx.dy.dz \\
&\qquad - \frac{1}{a^2} \iiint \overline{\underline{\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t}}} \, dx.dy.dz \\
&\qquad + \frac{1}{a^2} \int dt \iiint \varphi \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \cdot dx.dy.dz
\end{aligned}\right\} \quad (162)$$

Wenn wir nun die Forderung stellen, dafs die beiden Functionen φ und ψ in dem ganzen Raume der Wellengleichung genügen sollen, so heben sich sowohl in Gleichung (161) wie in Gleichung (162) auf der rechten Seite die zweiten und vierten Glieder gegen einander auf, und wir erhalten durch Vereinigung beider Gleichungen:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{\partial \varphi}{\partial N} . \psi . d\omega + \frac{1}{a^2} \int\int\int \overline{\underline{\psi . \frac{\partial \varphi}{\partial t}}} . dx . dy . dz = \int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{\partial \psi}{\partial N} . \varphi . d\omega$$

$$+ \frac{1}{a^2} \int\int\int \overline{\underline{\varphi . \frac{\partial \psi}{\partial t}}} . dx . dy . dz$$

oder

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int \left\{ \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \right\} d\omega = \frac{1}{a^2} \int\int\int \overline{\underline{\left\{ \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}}}_{t_0}^{t_1} dx . dy . dz \quad (163)$$

Es bleiben demnach nur Integrale übrig, welche entweder sich auf die Grenzen des Raumes beziehen, und über die Zeit zu integriren sind, — entsprechend solchen Einwirkungen, die von den Grenzen des Raumes aus während der ganzen Dauer der Zeit stattfinden, wo die Welle verläuft, — oder sich auf die Grenzen der Zeit beziehen, aber über den ganzen Raum zu nehmen sind. Letztere stellen den Ablauf solcher Veränderungen dar, die durch einen gegebenen Anfangs- und Endzustand in dem freien Raum bestimmt sind.

Wir wollen nun zunächst für ψ eine bestimmte Function einführen, und zwar eine solche, die einem Zuge schmaler Kugelwellen entspricht, die von allen Seiten des Raumes her gleichmäfsig nach einem Punkte $r = 0$ zusammenlaufen und in diesem einen Punkte einen unendlich grofsen Werth für ψ geben. Da diese Function deshalb in diesem Punkte discontinuirlich wird, so ist dieser Punkt von dem Integrationsraume auszuschliefsen. Diese Bedingungen sind erfüllt, wenn wir:

$$\psi = \frac{F_{(s)}}{r} \quad (164)$$

setzen, und unter s den Werth

$$s = r + a(t - t') \quad (165)$$

verstehen, worin a die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und t' zunächst nur den Zeitmoment darstellen soll, für den der Werth von φ gesucht wird. Ferner wollen wir noch die Abhängigkeit des $F_{(s)}$ von s so bestimmen, dafs für sehr kleine Werthe von s der Werth von F endlich wird, für gröfsere aber verschwindet. Zu dem Ende setzen wir:

$$F_{(s)} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{c}{c^2 + s^2} \quad (166)$$

Doch es würden auch mancherlei andere Functionen von s dieser Bedingung genügen.

Wenn wir darin c sehr klein wählen, so wird der Nenner im wesentlichen nur durch den Werth von s^2 bestimmt, so lange dieses nicht selbst sehr klein ist; und zwar wird der Werth von $F_{(s)}$ mit wachsendem s sehr schnell abnehmen. Für sehr kleine s wird aber der Werth von $F_{(s)}$ wesentlich durch c bestimmt. Den für $s = 0$ entstehenden Werth von $F_{(s)}$ wollen wir mit F_0 bezeichnen. Dann ist

$$F_0 = \frac{1}{\pi c} \tag{166a}$$

Ist also c, wie wir annehmen wollen, eine sehr kleine Grösse, so würde F_0 einen hohen Werth erreichen.

Nun ist aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{(s)}.ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c.ds}{\pi(c^2+s^2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\left(\frac{s}{c}\right)}{\pi\left(1+\frac{s^2}{c^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{s}{c}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}.\pi$$

$$= 1 \tag{167}$$

Während also der Werth der Function $F_{(s)}$ für jeden einzelnen bestimmten Werth von s gleichzeitig in hohem Grade von c abhängig ist, findet sich das eben berechnete Integral $F_{(s)}.ds$ zwischen unendlichen Grenzen genommen unabhängig von c.

An Stelle der hier benutzten Integrationsgrenzen $+\infty$ und $-\infty$ können wir nun aber, ohne den Werth des Integrales um merkliche Beträge zu verändern, beliebige andere Grenzen wählen, wenn sie nur dasjenige Intervall umschliessen, welches allein bei der Bildung des Integralwerthes merklich in Betracht kommt, und dazu gehört nur, dafs die Grenzwerthe von s verhältnifsmäfsig grofs verglichen mit c sind.

Es ist demnach $F_{(s)}$ eine Function, welche in um so geringerer Entfernung von der Stelle, wo $s = 0$ ist, schon verschwindend kleine Werthe hat, je kleiner wir c annehmen, während sie an der Stelle, wo $s = 0$ ist, einen verhältnifsmäfsig hohen Werth annehmen kann.

Ueberall, wo also die Function $F_{(s)}$, oder die $F_{(s)}$ als Factor enthaltende Function ψ (Gleichung 164) unter dem Integrationszeichen multiplicirt ist mit irgend einer Function der Zeit und der Coordinaten, z. B. mit φ, $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ oder $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$, die sowohl dem Raume als der Zeit nach continuirlich, mit endlichen Differentialquotienten sich ändern, wird der Werth des genannten Integrals merklich nur von denjenigen Werthen des φ und seiner Differentialquotienten beeinflufst werden, für welche $s = 0$ oder mindestens sehr klein ist, während für alle übrigen Elemente von Zeit oder Raum der Factor $F_{(s)}$ verschwindend klein wird und dadurch den Einflufs der dortigen Werthe von φ und seiner Differentialquotienten verschwinden macht.

Wir gewinnen dadurch für die Wellenpotentiale ähnliche Vortheile, wie wir sie früher bei den Anwendungen des Green'schen Satzes dadurch erreichten, dafs wir die Funktion $\psi = \frac{1}{r}$ setzten, wodurch wir einen Theil des Integrals ausschliefslich von dem Werthe der Potentialfunction im Punkte $r = 0$ abhängig machen konnten.

Den verlangten Ausschlufs des Punktes $r = 0$ von dem Integrationsraume erreichen wir dadurch, dafs wir um den Punkt $r = 0$ als Mittelpunkt mit dem sehr kleinen Radius ϱ eine Kugel construirt denken, deren innerer Raum als ausgeschlossen betrachtet wird. Wir beschränken die Untersuchung hier auf zwei einfachere Fälle der besprochenen Aufgabe, mittels deren Hülfe sich übrigens auch der Verlauf in den verwickelteren dann verhältnifsmäfsig einfach übersehen läfst.

A. Der erste dieser Fälle betrifft die Bewegung, die im unendlichen unbegrenzten Raume durch irgend eine zur Zeit $t = t_0$ bestehende Störung des Gleichgewichtszustandes hervorgerufen wird; dabei sind Grenzen nur für die Zeit gegeben.

B. Im zweiten Falle nehmen wir an, dafs der Raum feste Grenzen in endlicher Entfernung hat, und dafs die Störung des Gleichgewichts innerhalb endlicher Zeit durch Einwirkungen, die von diesen Grenzen ausgehen, hervorgerufen wird. Dabei werden wir indessen voraussetzen, dafs wir die Werthe von φ und seiner Differentialquotienten an allen Punkten der Grenzen des Raumes für die ganze Zeit, die in Betracht kommt, vollständig kennen, namentlich auch für spätere Zeiten, wo Wellen, die von Grenzstellen ausgegangen waren, schon zu anderen Grenzstellen gelangt sind. Sobald letzteres stattfindet, treten von den Wänden des Raumes Gegen-

wirkungen gegen die Bewegungen des Mediums auf, welche von der Natur desselben, sowie der es berührenden Wand abhängen, und deren Berücksichtigung nicht entwickelt werden kann, ohne in die physikalische Theorie dieser Gegenwirkungen (Reflexion und Refraction der Wellen) einzugehen.

§ 40. Wellen im unendlichen Raume durch eine anfängliche Gleichgewichtsstörung erregt.

In der Gleichung (163) verstehen wir unter t_0 den Zeitmoment des Anfangszustandes der Bewegung, unter t_1 einen späteren Moment, für den der Werth von φ im Punkte $r = 0$ gefunden werden soll. Indem wir in diese Gleichung Polarcoordinaten einführen, also

$$x = r \,.\, \cos\alpha$$

$$y = r \,.\, \sin\alpha \,.\, \cos\vartheta$$

$$z = r \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\vartheta$$

setzen, woraus sich ergiebt:

$$dx \,.\, dy \,.\, dz = r^2 \,.\, dr \,.\, \sin\alpha \,.\, d\vartheta \,.\, d\alpha,$$

können wir sie in die Form bringen:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int \left\{ \psi \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \,.\, \frac{\partial \psi}{\partial N} \right\} d\omega$$

$$= \frac{1}{a^2} \int_0^\infty dr \,.\, \int_0^\pi \sin\alpha \,.\, d\alpha \int_0^{2\pi} r^2 \,.\, \left[\left\{ \varphi \,.\, \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \,.\, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} \right]_{t_0}^{t_1} d\vartheta \tag{163a}$$

Hierin sind zunächst r, α, ϑ, t als unabhängige Variable zu behandeln.

Vermöge unserer Annahme über die Functionen F und s findet eine wichtige Beziehung zwischen ihren Differentialquotienten statt. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = a \,.\, \frac{\partial F}{\partial s} \tag{168}$$

und

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial s} \tag{168a}$$

so dafs für alle Werthe von r und t identisch

$$\frac{\partial F}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \tag{169}$$

ist. Da nach Gleichung (164)

$$\psi = \frac{F}{r}$$

gesetzt ist, so ist ferner

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{a}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \tag{169a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{F}{r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} \tag{169b}$$

Nehmen wir an, dafs die Zeitdauer $(t_1 - t_0)$ endlich sei, und dafs zur Zeit $t = t_0$ die Werthe von φ nur in einem Raume, der überall endliche Entfernung von dem Punkte $r = 0$ hat, von Null verschieden seien, so werden auch zur Zeit $t = t_1$ noch keine endlichen Veränderungen der Werthe von φ bis zu $r = \infty$ hinausgedrungen sein. Also sind während der ganzen Zeitdauer $(t_1 - t_0)$ für letztere Grenze $\varphi = 0$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial N} = 0$, so dafs die äufsere Grenze des Raumes überhaupt keinen Beitrag zu dem Integralwerthe giebt, die Integration nach der Zeit also überhaupt nur für die innere Grenze des Raumes, für die Kugelfläche $r = \varrho$ zu bilden ist, deren Flächenelement mit $d\omega$ bezeichnet werde, dessen Werth $d\omega = \varrho^2 \sin\alpha \,.\, d\alpha \,.\, d\vartheta$ zu setzen ist.

An der Oberfläche der kleinen Kugel ist $\frac{\partial \psi}{\partial N} = \frac{\partial \psi}{\partial r}$, und es tritt statt r im Nenner der beliebig klein zu nehmende Werth ϱ ein. Wenn wir also auf der linken Seite der Gleichung (163a) statt des Flächenelementes $d\omega$ das Flächenelement $\varrho^2 \,.\, \sin\alpha \,.\, d\alpha \,.\, d\vartheta$ einführen, so hebt sich nur in einem Gliede ϱ ganz weg, während in allen andern ϱ im Zähler stehen bleibt und diese Glieder daher zugleich mit ϱ verschwinden. Wir erhalten daher

$$\int_{t_0}^{t_1} d t \int \left(\psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \right) d\omega = \int d t \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi \,.\, F \,.\, \sin\alpha \,.\, d\alpha \,.\, d\vartheta.$$

Für den constanten Werth $r = \varrho$, ist F in der That nur Function von t allein, da die Hilfsgröfse s sich auf $s = \varrho + a(t - t')$ reducirt. In dem beliebig eng zu machenden Zeitintervalle, in welchem F erheblich von Null verschiedene Werthe erreicht, kann φ als ein

constanter Factor angesehen und vor das Integrationszeichen gestellt werden. Da nun nach Gleichung (167)

$$\int F_{(s)} . d s = 1$$

und hier

$$d s = a . d t$$

ist, so ergiebt sich

$$\int F . d t = \frac{1}{a}$$

Ferner ist

$$\int_0^\pi \sin \alpha . d \alpha . \int_0^{2\pi} d \vartheta = 4 \pi$$

Daher wird der Werth der linken Seite von (163a)

$$\int_{t_0}^{t_1} d t . \int \left\{ \psi . \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi . \frac{\partial \psi}{\partial N} \right\} d \omega = \frac{4 \pi}{a} . \varphi_{\substack{t = t' \\ r = 0}} \tag{170}$$

Die hier gegebene Bestimmung der Werthe der unabhängig Veränderlichen t und r, für welche der gefundene Werth von φ gilt, ergiebt sich dadurch, dafs es der Werth ist, der in dem Augenblick für $r = \varrho$ herrscht, wo

$$s = \varrho + a(t - t') = 0$$

d. h., wenn wir ϱ als verschwindend klein ansehen, $t = t'$ ist.

In den Integralen der rechten Seite von Gleichung (163a) dagegen ersetzen wir nach Gleichung (169a) $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ durch $\frac{a}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r}$. und haben, da $t = t_0$ beziehlich $t = t_1$ als Grenzwerthe der Zeit constant sind, F ausschliesslich als Function von r zu behandeln. Dann ergiebt sich, indem wir in Gleichung (163a) auf der linken Seite den in Gleichung (170) erhaltenen Werth einsetzen,

$$4 \pi a \varphi_{\substack{t = t' \\ r = 0}} = \int_0^\infty d r \int_0^\pi \sin \alpha . d \alpha \int_0^{2\pi} d \vartheta . r^2 \overline{\left\{ \varphi . \frac{a}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{F}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}}_{t_0}^{t_1} \tag{171}$$

Durch partielle Integration ist der Differentialquotient $\frac{\partial F}{\partial r}$ zu beseitigen; der dadurch gewonnene Factor F ist an der Grenze $r = \infty$ nach den gemachten Annahmen gleich Null für beide Zeitgrenzen, an der anderen Raumgrenze $r = \varrho$ werden alle Glieder durch die Multiplication mit ϱ verschwindend klein. Es verschwinden also alle auf die Raumgrenzen und Zeitgrenzen gleichzeitig bezogenen

Glieder, und es bleibt nach der partiellen Integration nur das dreifache Integral stehen, in welchem nur dr noch zu integriren ist, nämlich:

$$4\pi a \varphi_{\substack{t=t' \\ r=0}} = \int_0^\infty dr \int_0^\pi \sin\alpha . d\alpha \int_0^{2\pi} d\vartheta . \overline{\left\{ -a.F.\frac{\partial}{\partial r}(\varphi.r) - F.r.\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}}_{t_0}^{t_1} \quad (172)$$

Auf der rechten Seite kann nun die obere Grenze $t = t_1$ unberücksichtigt bleiben, weil für $t = t_1$ s für alle in Betracht kommenden Werthe von r mindestens gleich $a(t_1 - t')$ und mithin F verschwindend klein ist. Nur für die untere Grenze $t = t_0$ erreicht F hohe Werthe.

Wieder können die mit F multiplicirten Factoren in dem engen Intervall, wo F hohe Werthe erreicht, constant gesetzt werden mit dem der Gleichung $0 = s = r + a(t_0 - t')$ entsprechenden Werthe, und da hier $\int F.dr = \int F.ds = 1$, so erhalten wir:

$$4\pi a \varphi_{\substack{r=0 \\ t=t'}} = \int_0^\pi \sin\alpha . d\alpha \int_0^{2\pi} \left[a.\frac{\partial}{\partial r}(\varphi.r) + r.\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{\substack{r=a(t'-t_0) \\ t=t_0}} d\vartheta \quad (173)$$

Bisher sind die vier Variablen, die in den Functionen φ und ψ vorkommen, nämlich t, r, α, ϑ von einander unabhängig gewesen, und die partiellen Differentialquotienten derselben deshalb in dem gewöhnlichen Sinne genommen worden, wonach bei der Bildung jedes einzelnen vorausgesetzt wird, dafs die drei anderen Variablen unverändert bleiben. So sind sie auch noch in Gleichung (173) zu verstehen.

Ersetzen wir in Gleichung (173) den Buchstaben t' durch t_1, weil jetzt kein Grund mehr vorhanden ist, die beiden Gröfsen zu unterscheiden und dividiren wir durch a, so geht die Gleichung über in:

$$4\pi \varphi_{\substack{t=t_1 \\ r=0}} = \int_0^\pi \sin\alpha . d\alpha \int_0^{2\pi} d\vartheta . \left\{ \left[\varphi + r.\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right] + \frac{r}{a}.\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\}_{\substack{t=t_0 \\ r=a(t_1-t_0)}} \quad (173\text{a})$$

Wenn wir die Bezeichnung $d\omega$ für das Flächenelement einer Kugel vom Radius r oder $d\Omega$ für das einer Kugel vom Radius 1 also

$$d\omega = r^2 . \sin\alpha . d\alpha . d\vartheta = r^2 . d\Omega$$

einführen, so erhalten wir:

$$\varphi_{\substack{t=t_1\\r=0}} = \frac{1}{4\pi r^2}\int d\omega \left\{\frac{\partial}{\partial r}(\varphi r) + \frac{r}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\}_{\substack{t=t_0\\r=a(t_1-t_0)}} \tag{173b}$$

oder

$$\varphi_{\substack{t=t_1\\r=0}} = \frac{1}{4\pi}\int d\Omega \left\{\frac{\partial[r.\varphi]}{\partial r} + \frac{r}{a}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right\}_{\substack{t=t_0\\r=a(t_1-t_0)}} \tag{174}$$

Wenn S irgend eine Function von r und den Winkeln α und ϑ ist, so kann man das Integral

$$\frac{1}{4\pi}\int S.d\Omega = \frac{1}{4\pi r^2}\int S.r^2.d\Omega$$

als den Mittelwerth der sämmtlichen in der Entfernung r vorkommenden Werthe von S bezeichnen. In diesem Sinne kann man das Resultat der Gleichung (173b) so aussprechen:

Wenn in einem unendlich ausgedehnten gleichmäfsigen Medium eine Wellenbewegung stattfindet, bei welcher die veränderliche Grösse φ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2.\Delta\varphi$$

ohne Discontinuität von $t = t_0$ bis $t = t_1$ genügt hat, so ist in jedem Punkte des Raumes zur Zeit $t = t_1$ der Werth von φ gleich dem Mittelwerth derjenigen Werthe, welche die Gröfse

$$\frac{\partial}{\partial r}(\varphi.r) + \frac{r}{a}.\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

in einem vorausgehenden Augenblicke $t = t_0$ in den Punkten einer um $r = 0$ als Mittelpunkt beschriebenen Kugelfläche vom Radius $r = a(t_1 - t_0)$ gehabt hat.

Hierdurch ist der weitere Verlauf der Function φ in Raum und Zeit vollständig aus der Anfangsstörung φ_{t_0} und $\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}$ gegeben, da man jeden Punkt des unendlichen Raumes als den Punkt $r = 0$ wählen und zum Mittelpunkt von Kugelflächen machen kann. So weit diese die Gegend der von Null verschiedenen Anfangswerthe von φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$ und $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ durchschneiden, werden sie Störungen anzeigen, die zur Zeit $t_1 = t_0 + \frac{r}{a}$ in dem Punkte $r = 0$ eintreten werden. Je weiter der Punkt $r = 0$ von der Region der Anfangsstörung sich entfernt, desto kleiner wird die Kegelecke $\int d\Omega$ im Verhältnifs zur

ganzen Kugel 4π, wie dies der allmählichen Intensitätsabnahme in der Ferne entspricht. Nur ist bei dieser Form des Satzes die anfängliche Voraussetzung über die Continuirlichkeit der Function φ während der ganzen Zeit $(t_1 - t_0)$ und für den unendlichen Raum nicht zu vergessen.

§ 41. Zweiter Fall des Princips von Huyghens. Bestimmung der inneren Veränderungen aus den Veränderungen an der Grenzfläche eines geschlossenen Raumes.

Wir haben bisher nur Grenzen der Zeit angenommen, dagegen den Raum als unbegrenzt angesehen. Unsere Theoreme lehrten uns den weiteren Verlauf der Veränderungen im unendlichen Raume aus dem Anfangszustande herzuleiten. Zu dem Ende mufsten wir den Werth der Functionen φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für jeden Punkt des Raumes für die Zeit $t = t_0$ kennen. Dadurch waren dann auch die Werthe von $\frac{\partial \varphi}{\partial r}$ für diese Anfangszeit gegeben.

Das Problem, den Verlauf der Bewegungen durch die Aenderungen der Function φ auszudrücken, läfst sich in diesem zweiten Falle noch lösen, wenn uns die Werthe von φ (damit implicite auch $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$) und $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ längs der Grenzen des Raumes vollständig für jedes Flächenelement der Grenze und für das Zeitintervall gegeben sind, das rückwärts von dem Endpunkt der Zeit $t = t'$ bis zu derjenigen Zeit t_0 reicht, für welche die längste gerade Verbindungslinie zweier Grenzpunkte $r_{max} = a(t' - t_0)$ ist.

Es handelt sich also bei dieser zweiten Form der Aufgabe darum, die inneren Aenderungen der bewegten Masse aus den Zuständen an ihrer Grenze herzuleiten, welche als bekannt vorausgesetzt werden. Diese Grenze wird immer als vollständig geschlossen zu betrachten sein, und über den Ursprung der eingetretenen Gleichgewichtsstörungen längs derselben wird nichts weiter vorausgesetzt; namentlich können dieselben theilweise Nachwirkungen sein von aufserhalb des Integrationsraumes früher erregten Wellen, die durch einen offenen Theil der Grenze eindringen, oder auch reflektirte Theile von Wellen, welche, nachdem sie durch den inneren Raum gelaufen sind, einen Theil der Grenze erreicht haben, deren explicite Bestimmung also erst durch Kenntnifs der Gesetze der Reflexion, Brechung und Absorption des Lichtes gewonnen werden kann.

Die Bezeichnung kann dieselbe bleiben wie in Gleichung (163), auch ist die Function ψ ebenso wie dort zu bilden

$$\psi = \frac{1}{r} F_{(s)}$$

$$s = r + a(t - t')$$

und wie dort ist der Punkt $r = 0$, in welchem ψ discontinuirlich wird, dadurch von dem Integrationsraume auszuschliefsen, dafs man um den Punkt $r = 0$ eine Kugel mit dem sehr kleinen Radius ϱ construirt denkt.

Die Grenzintegrale über die Oberfläche dieser kleinen Kugel sind zu bilden und zu transformiren ganz wie in dem früheren Falle. Nun werden wir die untere Grenze der Zeit t_0 so weit zurückverlegen, dafs

$$a(t' - t_0) > r_{max}$$

d. h. gröfser ist als die gröfseste Entfernung r, die zwischen Grenzpunkten des Integrationsraumes vorkommt. Unter diesen Umständen verschwindet die rechte Seite der Gleichung (163). Denn für $t = t_1$ wird s für alle Punkte des Raumes positiv und für $t = t_0$ wird s für alle Punkte des Raumes negativ sein; aber weder für t_1 noch für t_0 wird s verschwinden. Daher müssen F und $\frac{dF}{dt}$ verschwindend klein sein, und daraus folgt, dafs die rechte Seite der Gleichung (163) verschwindend klein ist.

Somit bleibt in diesem Falle nur das Integral links über die innere und äufsere Oberfläche des Raumes stehen. Der Werth desjenigen über die innere Oberfläche, nämlich die der kleinen Kugel $r = \varrho$, ist von genau demselben Werthe, wie er in Gleichung (170) gefunden ist. Die Gleichung (163a) reducirt sich also auf:

$$\frac{4\pi}{a} \cdot \varphi_{\substack{t = t_1 \\ r=\varrho=0}} = - \int_{t_0}^{t_1} dt . \int \left\{ \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} - \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \right\} d\omega \tag{175}$$

Wenn wir für ψ seinen Werth einsetzen, ergiebt sich:

$$\frac{4\pi}{a} \cdot \varphi_{\substack{t = t' \\ r=\varrho=0}} = - \int_{t_0}^{t_1} dt \int \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot F_{(s)} + \frac{\partial r}{\partial N} \left[\frac{\varphi}{r^2} \cdot F_{(s)} - \frac{\varphi}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial s} \right] \right\} d\omega \tag{175a}$$

Da für jedes einzelne $d\omega$ der Werth des r, den wir dementsprechend mit r_ω bezeichnen wollen, unveränderlich ist, so ist

das in Gleichung (175a) vorkommende s in $F_{(s)}$ und $\frac{\partial F_{(s)}}{\partial s}$ nur noch als Function von t zu betrachten, indem zu setzen ist:

$$s = r_\omega + a(t - t')$$
$$ds = a.dt$$

Danach bekommt die genannte Gleichung die Form

$$4\pi\varphi_{\substack{t=t'\\r=0}} = -\int_{t_0}^{t_1} a.dt \int \left\{ F_{(s)} \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} + \frac{\partial r}{\partial N} \cdot \frac{\varphi}{r^2} \right] - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{\varphi}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \right\} d\omega \quad (175\text{b})$$

Wenn wir durch partielle Integration nach t das $\frac{\partial F}{\partial t}$ beseitigen, erhalten wir:

$$4\pi\varphi_{\substack{t=t'\\r=0}} = -\int_{t_0}^{t_1} a.dt \int F_{(s)} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} + \frac{\partial r}{\partial N} \left[\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{ar} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \right\} d\omega \quad (175\text{c})$$

Denn das durch die partielle Integration eingeführte Integral verschwindet, weil, wie schon oben bemerkt, $F_{(s)}$ für die Zeitgrenzen verschwindet.

Mit Rücksicht auf die besonderen Eigenschaften der Function $F_{(s)}$, wonach sie nur für sehr kleine Werthe von s sich von Null unterscheidet, und

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_{(s)} . ds = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{(s)} . a . dt = 1$$

ist, können wir demnach die mit F unter dem Integralzeichen multiplicirten Gröſsen als constant den Werth behaltend, den sie für $s = 0$ haben, betrachten und erhalten

$$4\pi\varphi_{\substack{t=t'\\r=0}} = -\int \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot \frac{1}{r} + \frac{\partial r}{\partial N} \left[\frac{\varphi}{r^2} + \frac{1}{ar} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] \right\} d\omega_{\substack{r = r_\omega \\ t = t' - \frac{r_\omega}{a}}} \quad (176)$$

Wir wollen statt t' wieder t_1 schreiben, weil jetzt kein Grund mehr vorhanden ist, die beiden Gröſsen zu unterscheiden. Bisher waren in unseren Integralen vier unabhängige Variable enthalten t, r und zwei Winkel, wie die oben als Coordinaten gewählten α und ϑ. Durch die neu hinzugekommene Gleichung

$$s = 0 = r_\omega + a(t - t_1)$$

werden aber t und r_ω von einander abhängig gemacht, und in der Gleichung (176) haben wir nur noch drei unabhängige Variable,

r oder t, neben α und ϑ, und wir können demnach φ als eine Function von α, ϑ und $t = t_1 - \frac{r_\omega}{a}$ auffassen. Dabei wird dann geschrieben werden können

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = - a \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\varphi_{t = t_1 - \frac{r}{a}} \right)$$

wenn wir uns denken, dafs die Variable r, soweit sie explicite in φ vorkommt, bei der Differentiation als unveränderlich angesehen wird und als veränderlich nur insofern sie in dem Ausdruck $t_1 - \frac{r}{a}$ vorkommt. Somit können wir schreiben

$$4 \pi \varphi_{\substack{t = t_1 \\ r = 0}} = \int \left\{ \frac{\partial r}{\partial N} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \cdot \varphi_{\left(t_1 - \frac{r}{a}\right)} \right] - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right\}_{r = r_\omega} d\omega \tag{177}$$

Die Gröfse $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$, welche noch vollkommen frei bestimmbar bleibt, wenn auch φ und dadurch auch $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ längs der ganzen Grenze von t_0 bis t_1 gegeben ist, hat hier eine wesentlich andere Bedeutung als die im ersten Gliede des Integrals vorkommenden Differentialquotienten nach N. Da nämlich φ abhängig ist von r, α und ϑ, ist explicite geschrieben

$$\frac{\partial \varphi}{\partial N} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial N} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial N} + \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial N}$$

während in das erste Glied des Integrals nur der erste dieser Theile eintritt.

Das Endglied des Integrals $- \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega$ hat ganz die Form eines Wellenpotentials, das von einer über die Grenze ausgebreiteten Schicht von Erregungspunkten ausgeht, und giebt den Werth, den dieses in dem von uns als $r = 0$ bezeichneten, aber übrigens beliebig zu wählenden Punkte haben würde. Das Anfangsglied entspricht in seiner Form dem Wellenpotential einer Doppelschicht von Erregungspunkten, die auf beiden Seiten der Grenzfläche mit entgegengesetzten Zeichen behaftet liegen.

Daraus geht also der gewöhnlich als das Princip von Huyghens benannte Satz hervor, dafs j e d e W e l l e n b e w e g u n g i m I n n e r n e i n e s v o n E r r e g u n g s p u n k t e n f r e i e n R a u m e s a n g e s e h e n w e r d e n k a n n a l s d i e S u p e r p o s i t i o n v o n k u g e l i g s i c h a u s b r e i t e n d e n W e l l e n, d e r e n E r r e g u n g s c e n t r a i n d e r O b e r-

fläche dieses Raumes, theils in einer einfachen Schicht, theils in einer Doppelschicht liegen. Die Axen der Doppelpunktpaare sind nach den Normalen der Grenzflächen orientirt, und daher ihrerseits ebenfalls unabhängig von der Lage des Punktes $r = 0$.

§ 42. Anwendung des Huyghens'schen Principes auf elektromagnetische Schwingungen.

Für die bisherigen mit φ bezeichneten Functionen, von denen wir nur vorauszusetzen brauchten, dafs sie der Wellengleichung genügten, wollen wir von jetzt an die Componenten der elektrischen und magnetischen Momente, also die Gröfsen, die wir früher mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und mit $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bezeichnet haben, einsetzen. Diese elektrischen und magnetischen Bewegungen sind aber nicht unabhängig von einander, sondern wir haben gesehen, dafs sie in gewisser Weise aneinander gekettet sind, und dafs stets gleichzeitig bestimmte Schwingungen elektrischer und magnetischer Natur im Raume erregt werden müssen, wenn der Wellenzug ungestört in sich selbst ablaufen soll, ohne sich weiter zu verändern, und zwar waren diese Beziehungen schon durch die elektrischen Grundgleichungen gegeben.

Wir wollen einmal annehmen, es seien in einem Theile des unendlichen Raumes die magnetischen und elektrischen Momente und deren Vertheilung gegeben. Wenn die Elektricität dann irgendwo zusammengeströmt ist, so dafs also die Dichtigkeit der wahren Elektricität an gewissen Stellen von Null verschieden ist, so bleibt, wie wir gesehen haben, in isolirenden Medien die Dichtigkeit trotz der vor sich gehenden elektrischen Schwingungen an der Stelle unverändert. Wenn also die Gröfse $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}$ nicht von Anfang an überall Null ist, so bleibt sie in jedem einzelnen Volumelement des ruhenden Aethers unverändert, trotz der elektrischen Oscillationen, die in ihm vorgehen, und wir brauchen dieselbe also gar nicht zu berücksichtigen. Wir können vielmehr, wenn wir nur die Oscillationen zu bestimmen suchen, die genannte Gröfse gleich Null setzen, so dafs also die Annahme

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 0$$

zulässig ist. Nun wollen wir weiter voraussetzen, dafs die elektrischen Momente in dem betreffenden Raume als continuirliche Functionen

der Coordinaten in irgend welcher beliebigen, ganz willkürlichen Weise gegeben seien. Dann können wir sie, wie in § 16 gezeigt worden ist, setzen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x}\\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y}\\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{178}$$

Wenn diese Gleichungen erfüllt sind, so bekommen wir

$$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \Delta \Psi \tag{178a}$$

Es geht daraus hervor, dafs

$$\Delta \Psi = 0$$

sein mufs, und zwar würde es hier im ganzen unendlichen Raume gleich Null sein, woraus dann folgt, dafs

$$\Psi = 0$$

sein mufs, so dafs wir nunmehr setzen können:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y}\\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z}\\ \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{178b}$$

Es war dann weiter schon ausgeführt worden, dafs wir U, V, W so wählen können, dafs sie die gegebenen Werthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ darstellen, und dabei auch noch die Gleichung

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \tag{178c}$$

erfüllen.

Wenn wir ferner die Functionen U, V, W so wählen, dafs sie der Wellengleichung und der Gleichung (178c) entsprechen, so können wir aus ihnen berechnen, wie die Wellen, welche die Verbreitung der Functionen U, V, W im Raume darstellen, verlaufen, und dadurch bekommen wir durch Differentiirung die Ausbreitung der Functionen $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$.

Die magnetischen Momente sind nun andererseits mit den elektrischen durch die folgenden Gleichungen (108) verbunden:

$$A\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)$$

$$A\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)$$

$$A\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right)$$

Die magnetischen Momente müssen ebenfalls den MAXWELL'schen Gleichungen und damit auch der Wellengleichung genügen, und können in derselben Weise dargestellt werden wie die elektrischen Momente. Wenn die magnetischen Momente also bekannt sind, so sind durch die MAXWELL'schen Gleichungen auch die Differentialquotienten nach der Zeit von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gegeben. Diese brauchen wir aber, weil in der Gleichung, die das HUYGHENS'sche Princip ausspricht, Integrale vorkommen, welche den Factor $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ enthalten. Es genügt uns also nicht, dafs wir die Anfangswerthe von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ kennen, sondern es müssen auch die Werthe von $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}$, $\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}$ und $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$ bekannt sein, und diese können gefunden werden, wenn man die Anfangswerthe der magnetischen Momente ebenfalls kennt. Die Kenntnifs der magnetischen Momente für den Anfangszustand ist also ebenso nöthig wie die der elektrischen, damit man die Differentiale nach der Zeit von $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ finden kann, welche von den Anfangswerthen dieser letzteren Gröfsen ganz unabhängig sind.

Man würde demnach von einer beliebigen Vertheilung der elektrischen und der magnetischen Momente im Anfangszustande ausgehen können, nachdem man sie in der Form der Gleichungen (178) dargestellt hat. Dann würde man aus den magnetischen Momenten die Differentialquotienten nach der Zeit von den elektrischen Momenten zu suchen haben, und hätte nun in Bezug auf die elektrischen Momente alles das für den Anfangszustand gegeben, was wir brauchen, um den ferneren Ablauf der Wellen mittels des HUYGHENS'schen Principes zu berechnen. Man sieht hieraus aber auch gleichzeitig, dafs die elektrischen Momente allein oder die magnetischen Momente allein nicht ausreichen, um den ganzen ferneren Ablauf der Wellen zu bestimmen.

Die Durchführung dieser Integralumformungen erfordert aller-

dings meist sehr verwickelte Quadraturen, und nur diejenigen Formen lassen sich praktisch verwenden, welche sich auf Schwingungen von bestimmter constanter Schwingungsperiode beziehen; aber es ist doch wünschenswerth, dafs man wenigstens die Ableitung dieser allgemeinsten Sätze kennen lernt, und deshalb ist sie hier gegeben. Beispiele einiger einfacherer Formen sind schon oben in § 12 aufgeführt.

§ 43. Einführung einfacher pendelartiger Schwingungen.

Wir haben bisher abgesehen von den kleinen Unterschieden der Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche zwischen optischen Wellen von verschiedener Schwingungsperiode vorkommen. Thatsächlich bestehen aber in den meisten durchsichtigen Medien, wenigstens in denen, die neben dem Aether noch schwere Masse enthalten, solche Unterschiede, und nur Wellen, deren sämmtliche Componenten mit gleicher Geschwindigkeit fortschreiten, behalten dabei auch unveränderte Form. Andernfalls trennen sich diejenigen Componenten der Schwingungen, welche ungleiche Fortpflanzung haben, bald auch dem Raume nach. Diejenigen Componenten, in welche ein zusammengesetzter Wellenzug dadurch zerfällt, pflegt man einfache oder auch pendelartige Schwingungen zu nennen. Man versteht darunter solche Schwingungen, bei denen die Elongation der schwingenden Theilchen in derselben Weise ab- und zunimmt, wie bei den Schwingungen eines Pendels, bei denen sie als Function der Zeit dargestellt werden kann, indem man ihre Amplitude entweder mit cos (nt) oder sin (nt) multiplicirt, wo n die Anzahl der Schwingungen bedeutet, welche in 2π Sekunden ausgeführt werden. Dieselbe Form der Aenderung kann aber auch auf elektrische Schwingungen übertragen werden, obwohl wir es da wohl nicht mit der Bewegung einer Substanz zu thun haben.

Solche einfache Schwingungen kann man darstellen durch Wellenpotentiale von der Form:

$$(\Phi + \Psi . i) . e^{int},$$

wo Φ und Ψ von t unabhängig sind. Wenn man ein solches Wellenpotential in seinen reellen und imaginären Theil zerlegt, so lautet der reelle Theil

$$\Phi . \cos(nt) - \Psi . \sin(nt)$$

und der reelle Factor des imaginären Theiles:

$$\Phi . \sin(nt) + \Psi . \cos(nt).$$

Aus diesen allgemeinen Formen setzen sich also die Wellenpotentialfunctionen solcher einfachen Schwingungen zusammen.

Wenn wir nun unter φ sowohl $\Phi . \sin(n t)$ wie $\Psi . \cos(n t)$ verstehen, so ist leicht ersichtlich, dafs

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = - n^2 . \varphi \tag{179}$$

ist; denn Φ und Ψ sind selbst von der Zeit unabhängig, und wenn wir $\sin(n t)$ oder $\cos(n t)$ zweimal nach der Zeit differentiiren, so erhalten wir jedesmal den unveränderten Werth multiplicirt mit $- n^2$.

Setzen wir nun diesen Werth für $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$ in die Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 . \Delta \varphi$$

ein, so entsteht dadurch für solche Wellenpotentiale, welche e^{int} oder $\cos(n t)$ beziehlich $\sin(n t)$ als Factor enthalten, die neue Differentialgleichung:

$$a^2 . \Delta \varphi + n^2 . \varphi = 0$$

oder

$$\frac{n^2}{a^2} \cdot \varphi + \Delta \varphi = 0 \tag{180}$$

Wir haben oben in § 12 schon gesehen, dafs wir ebene Wellen erhalten, wenn wir

$$\varphi = A . e^{i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x \pm a t)} \tag{181}$$

oder, nur den reellen Theil beachtend,

$$\varphi = A . \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x \pm a t) \tag{182}$$

setzen.

Je nachdem wir das positive oder negative Vorzeichen wählen, geschieht die Fortpflanzung der Wellen in der Richtung der negativen oder positiven x-Werthe. Damals haben wir aber bereits gesehen, dafs es bei diesem Integral für ebene Wellen nur darauf ankommt, dafs dasselbe eine Function von $(x - at)$ oder $(x + at)$ sei.

In analoger Weise können wir nun auch bei den Kugelwellen die willkürlichen Functionen von $(r \pm a t)$ durch die bestimmte Function $e^{i \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot (r \pm a t)}$ ersetzen und erhalten dann:

$$\varphi = A \cdot \frac{\cos \frac{2\pi}{\lambda} (r \pm a t)}{r} \tag{183}$$

$$= \frac{A \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} a t}{r} \mp \frac{A \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} a t}{r} \tag{183a}$$

oder

$$\varphi = \frac{A \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda}(r \pm a t)}{r} \tag{184}$$

$$= \frac{A \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} \cdot r \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} a t}{r} \pm \frac{A \cdot \cos \frac{2\pi}{\lambda} r \cdot \sin \frac{2\pi}{\lambda} a t}{r} \tag{184a}$$

Die einfachen Schwingungen spielen sowohl in der Akustik als in der Optik eine grofse Rolle. In der Akustik sind verschiedene Systeme einfacher pendelartiger Schwingungen in ganz beliebig zusammengesetzten mechanischen Systemen möglich. Jedes von diesen Systemen einfacher Schwingungen ist mechanisch unabhängig von den anderen, und wenn es einmal erregt ist, kann es weiter bestehen, so dafs sich also die Gesammtbewegung betrachten lässt als algebraische Zusammensetzung der einzelnen Bewegungen, die den verschiedenen einfachen, pendelartigen Schwingungen angehören. Jedes einzelne erregt Resonanz, unabhängig von den anderen, und wird vom Ohre unabhängig wahrgenommen, obgleich bei den Schallwellen die spontane Scheidung der Wellen verschiedener Periode durch verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit nicht eintritt.

Bei der Optik liegen die Verhältnisse völlig analog. Die verschieden farbigen Lichtstrahlen unterscheiden sich durch verschiedene Schwingungsdauer ihrer einfachen Schwingungen. Jede besondere Farbe, die im weifsen Lichte vorkommt, repräsentirt ein solches System von einfachen Schwingungen bestimmter Schwingungsdauer; aber jedes System mit seiner besonderen Schwingungsperiode pflanzt sich gesondert fort, so dafs die Einzelschwingungen desselben alle mit gleicher Geschwindigkeit fortgehen und sich nicht von einander trennen. Dadurch läuft der ganze Wellenzug, welcher gleiche Schwingungsperiode hat, als continuirliches mechanisches Ganze fort, unabhängig von den gleichzeitig bestehenden Wellenzügen, welche andere Schwingungsdauer haben.

Es ist oben schon erwähnt worden, dafs die eingeführte Gröfse n gleich ist der auf 2π Secunden bezogenen Schwingungszahl oder gleich 2π dividirt durch die Schwingungsdauer T; es ist also

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{2\pi}{T} \\ \text{und} \quad \frac{n}{a} &= \frac{2\pi}{a \cdot T} \end{aligned}\right\} \tag{185}$$

Da nun an jedem Punkte eines Wellenzuges in der Secunde so viel Wellen vorübergehen müssen, als in der Strecke enthalten sind, um welche sich die betreffende Wellenbewegung in der nächsten Secunde fortgepflanzt haben wird, so ist die Länge λ jeder einzelnen Welle gleich der Strecke, um welche sich die Welle in der Zeit T fortgepflanzt hat, d. h. es ist

$$\lambda = a \,.\, T \tag{186}$$

Daraus folgt:

$$\frac{n}{a} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{186a}$$

und

$$n = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \tag{186b}$$

Wir wollen nun:

$$k = \frac{n}{a} = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{187}$$

setzen. Dann verwandelt sich unsere Differentialgleichung (180) in:

$$k^2 \,.\, \varphi + \Delta \varphi = 0 \tag{188}$$

und wir können nun von den in unseren Gleichungen (183) und (184) aufgestellten Ausdrücken für Wellenpotentiale, die sich kugelförmig von einem Punkt aus verbreiten, als gemeinsame Eigenschaft angeben, dafs sie aufser einer Constanten und demjenigen Factor, der sie als pendelartige Schwingungen charakterisirt, nämlich $\sin(n\,t)$ bez. $\cos(n\,t)$, nur noch einen der beiden Factoren $\frac{\cos(k\,r)}{r}$ oder $\frac{\sin(k\,r)}{r}$ enthalten.

Im ersten Falle, also bei dem Factor $\frac{\cos(k\,r)}{r}$, würde eine Bewegungsform bestehen, welche für $r = 0$ unendlich wird, und demnach in dem Punkte $r = 0$ einen besonders zu behandelnden Ausnahmspunkt hat. Ist hingegen in dem Werthe von φ der Factor $\frac{\sin(k\,r)}{r}$ vorhanden, so würde damit eine Bewegungsform dargestellt sein, welche für $r = 0$ keinen Ausnahmspunkt hat und dort nicht unendlich wird; denn wenn wir $\sin(k\,r)$ in eine Reihe entwickeln und durch r dividiren, so erhalten wir:

$$\frac{\sin(k\,r)}{r} = k - \frac{k^3 \,.\, r^2}{1\,.\,2\,.\,3} + - \ldots\ldots$$

in welchem Werthe für $r = 0$ nur das erste constante und endliche Glied bestehen bleibt. In dieser Weise unterscheiden sich also die

beiden Formen von φ, die wir unmittelbar durch Zerlegung der imaginären Potenzen gefunden haben.

Wir können nun weitere Integralformen erhalten, indem wir Differentialquotienten von diesen Formen nach x, y oder z bilden. Es wird z. B. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right)$ multiplicirt mit $\cos(nt)$ oder $\sin(nt)$ ebenfalls eine brauchbare Form sein. Da der Ausdruck, welcher nach x differentiirt werden soll, von x nur insofern abhängig ist, als x in r enthalten ist, und da in ihm r die einzige Variable ist, so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right) = \frac{x}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right) \tag{189}$$

worin $\frac{x}{r}$ gleich ist dem Cosinus des Winkels, den r mit der x-Axe bildet. Analoge Formen haben die übrigen Integrale, welche durch Differentiation nach den anderen Coordinaten entstehen. Wie wir schon früher gesehen haben, hat die Amplitude dieser Schwingungen nicht nach allen Richtungen der Kugel die gleiche Gröfse, sondern es sind einzelne Richtungen bevorzugt.

§ 44. Erweiterte Form des Green'schen Satzes, bezogen auf Wellenpotentiale pendelartiger Schwingungen.

Viele der früher erlangten Resultate werden viel einfacher und übersichtlicher, wenn wir voraussetzen, dafs die vorhandenen Schwingungen einfache pendelartige Schwingungen sind.

Wir gehen aus von der Annahme, dafs wir zwei Functionen, φ und ψ haben, welche der Differentialgleichung (188)

$$k^2 . \varphi + \Delta \varphi = 0$$

entsprechen, und bilden das Raumintegral:

$$\iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 . \varphi . \psi \right\} dx . dy . dz.$$

Die ersten Glieder können wir partiell integriren, und zwar ergiebt sich durch Integration von ψ ein Oberflächenintegral; es ist nämlich:

$$\iiint \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) dx . dy . dz$$

$$= -\int \psi \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \cos a + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \cos b + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \cos c \right] d\omega$$

$$-\iiint \psi \,.\, \Delta \varphi \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz$$

$$= -\int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega - \iiint \psi \,.\, \Delta \varphi \,.\, dx \,.\, dy \,.\, dz \quad (190)$$

worin ebenso wie früher a, b, c die Winkel zwischen der nach dem Innern des Raumes gerichteten Normale N und den Coordinataxen bezeichnen. Wir erhalten durch Einsetzen dieses Werthes in unser obiges Integral:

$$\iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 \,.\, \varphi \,.\, \psi \right\} dx \,.\, dy \,.\, dz$$

$$= -\int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega - \iiint \psi \,.\, (\Delta \varphi + k^2 \,.\, \varphi) dx \,.\, dy \,.\, dz \quad (191)$$

Wenn wir aber nach φ integriren, ergiebt sich:

$$\iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 \,.\, \varphi \,.\, \psi \right\} dx \,.\, dy \,.\, dz$$

$$= -\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega - \iiint \varphi \,.\, (\Delta \psi + k^2 \,.\, \psi) dx \,.\, dy \,.\, dz \quad (192)$$

Da nun nach unserer Voraussetzung sowohl φ wie ψ in dem ganzen Raum, über welchen die Integration ausgedehnt wird, die Differentialgleichung (188) erfüllt, so fällt in jeder der beiden Gleichungen (191) und (192) das letzte Integral fort, und es ergiebt sich:

$$\iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 \,.\, \varphi \,.\, \psi \right\} dx \,.\, dy \,.\, dz$$

$$= -\int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega \quad (191\text{a})$$

und

$$\iiint \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial z} - k^2 \,.\, \varphi \,.\, \psi \right\} dx \,.\, dy \,.\, dz$$

$$= -\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega \quad (192\text{a})$$

Durch Vereinigung dieser beiden Gleichungen erhalten wir nun:

$$\int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega = \int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega \quad (193)$$

oder

$$0 = \int \left(\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} - \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) d\omega \quad (193\text{a})$$

Von den hier erhaltenen Gleichungen wollen wir nunmehr in einigen besonderen Fällen Anwendung machen.

1. Wenn wir

$$\varphi = \psi$$

setzen, so verwandeln sich unsere Gleichungen (191a) und (192a) beide in

$$\left.\begin{aligned} \iiint\left\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 - k^2 . \varphi^2\right\} dx . dy . dz \\ = -\int \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega \end{aligned}\right\} \quad (194)$$

Ist nun auch φ an der ganzen Oberfläche des Raumes, über den integrirt werden soll, gleich Null, so mufs zwar das Raumintegral ebenfalls gleich Null sein; aber wir dürfen hieraus nun nicht, wie früher (§ 24) schliefsen, dafs jetzt auch die einzelnen Glieder gleich Null sein müssen; denn eines derselben hat jetzt das negative Vorzeichen, und es ist also die Möglichkeit gegeben, dafs die Summe der Glieder gleich Null ist, ohne dafs jedes einzelne Glied gleich Null ist.

Dieses kann nun in der That bei Wellenpotentialen der Fall sein; denn wenn wir z. B. innerhalb einer Kugel

$$\varphi = \frac{\sin(kr)}{r} \cdot \sin(nt) \qquad (195)$$

setzen und den Radius der Kugel so wählen, dafs $\sin(kr)$ an der äufseren Oberfläche der Kugel gleich Null ist, so würde daraus durchaus nicht folgen, dafs die Function φ in der ganzen Kugel gleich Null ist. Wir haben dann sogenannte Eigenschwingungen der Kugel. Es ist das eine Art der Bewegung, die in der Kugel unendlich lange bestehen kann, ohne dafs sie von aufsen her unterhalten wird, wenn sie einmal eingeleitet ist. In Wirklichkeit kommt dieses in strengem Sinne nicht vor. Denn es wird sich z. B. eine Schallbewegung solcher Art in einer abgeschlossenen Kugel mit festen Wänden allerdings verhältnifsmäfsig lange halten können, aber schliefslich werden doch Erschütterungen der Wände entstehen; hierdurch wird dann die lebendige Kraft allmählich an den äufseren Raum abgegeben, der jenseits der Wände liegt, theils wird sie durch innere Reibung in Wärme umgesetzt, so dafs also thatsächlich eine solche Eigenschwingung zwar sehr lange, aber doch nicht ewig dauernd im Innern des Raumes nachhallen kann. Da nun $\frac{\sin(kr)}{r}$ nach jeder halben Wellenlänge einmal gleich Null wird, so läfst

sich eine sehr grofse Menge von Wellenlängen angeben, die in derselben Kugel als Eigenschwingungen bestehen könnten.

Wenn wir die Differentialquotienten benutzen, also z. B. nach x differentiiren, so würden wir, wie wir eben gesehen haben, einen Ausdruck von der Form

$$\cos\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin k r}{r}\right)$$

erhalten. Das wäre nun eine andere Function von r, für welche man das r auch so wählen könnte, dafs sie an der Oberfläche der Kugel gleich Null wird. Führen wir die Differentiation aus und setzen den erhaltenen Werth gleich Null, so bekommen wir:

$$k \cdot \frac{\cos(k r)}{r} - \frac{1}{r^2} \cdot \sin(k r) = 0 \tag{196}$$

Diese Gleichung läfst sich leicht umformen in

$$\operatorname{tg}(k r) = k . r \tag{196a}$$

Das ist eine transcendente Gleichung, die durch eine unendliche Anzahl von Werthen für r erfüllt wird. Wenn $k r$ sehr grofs ist, so wird auch $\operatorname{tg}(k r)$ relativ sehr grofs sein müssen, d. h. der Winkel wird ein wenig kleiner sein, als eine ungerade Anzahl von rechten Winkeln. In der Nähe jedes ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ wird sich also ein Winkel finden lassen, für welchen die Tangente den vorgeschriebenen Werth bekommt. Es läfst sich demnach auch hier eine ganze Reihe verschiedener Schwingungsformen für Kugeln von bestimmten Radien angeben, welche Eigenschwingungen entsprechen und unter den oben erwähnten Einschränkungen in dem Innern der Kugel dauernd bestehen können, ohne dafs sie von aufsen her unterstützt zu werden brauchen.

Eine ähnliche Reihe von Werthen für φ ist möglich, wenn die rechte Seite unserer Gleichung (194) dadurch verschwindet, dafs wir $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ an der ganzen Oberfläche gleich Null annehmen.

2. Wenn wir auf der ganzen Oberfläche ψ gleich einer Constanten z. B. $= 1$ und $\varphi = \frac{1}{r}\sin(k r)$ setzen, so giebt Gleichung (193)

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega = 0 \tag{197}$$

Setzen wir dagegen $\varphi = \frac{1}{r} . \cos(k r)$ und umschliefsen den Punkt

$r = 0$ mit einer kleinen Kugel vom verschwindenden Radius ϱ, so wird wie in § 24

$$\int \frac{\partial \varphi}{\partial N} . d\omega = 4\pi \tag{198}$$

Es sind dies analoge Sätze wie wir sie oben für die Potentialfunctionen anziehender Massen gewonnen hatten, bei denen das über $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ genommene Oberflächenintegral durch die Summe der Massen auszudrücken war, die im Innern der betreffenden Oberfläche lag.

Die von uns gefundenen Formen der Lösungen sind superponirbar. Wir wollen nun einmal voraussetzen, dafs die beiden Bewegungsformen, welche durch Gleichung (183) dargestellt werden, zugleich bestehen, dann haben wir also zwei einander entgegenlaufende Wellen, und es ist:

$$\varphi = \frac{A . \cos \frac{2\pi}{\lambda}(r - a t)}{r} + \frac{A . \cos \frac{2\pi}{\lambda}(r + a t)}{r} \tag{199}$$

$$= \frac{2 A . \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot r\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot a t\right)}{r} \tag{199a}$$

oder, wenn wir die Gleichungen (186b) und (187) berücksichtigen

$$\varphi = \frac{2 A . \cos(k r) . \cos(n t)}{r} \tag{199b}$$

Die aus beiden fortlaufenden Wellen resultirende Bewegung besteht also in einfachen Schwingungen, welche für verschiedene Werthe von r sehr verschiedene, zwischen Null und $2A$ liegende Amplituden haben. Zwischen den schwingenden Theilen finden wir auch solche, in welchen das φ unverändert bleibt, für welche nämlich $\cos(kr) = 0$ ist. Man nennt solche Wellen, bei denen die schwingenden Abtheilungen von einander durch Punkte oder Flächen mit ungeänderten Werthen von φ getrennt sind, „stehende Wellen," weil sie sich nicht regelmäfsig fortpflanzen wie die Wellen, die wir ursprünglich kennen gelernt haben, sondern an derselben Stelle stehen bleiben.

Für die Optik sind im allgemeinen die stehenden Schwingungen von sehr geringer Bedeutung. Erst in der neuesten Zeit sind Versuche ausgeführt worden, bei denen stehende Schwingungen des Lichtes in die Erscheinung treten. Hr. O. Wiener und später Hr G. Lippmann haben in Collodiumhäutchen, die mit Silbersalzen im-

prägnirt waren, Interferenzen, d. h. stehende Wellen durch Reflexion an einer Quecksilberfläche, die die Collodiumhäute dicht berührte, erzeugt. In den in regelmäſsigem Abstand auf einander folgenden Flächen, welche die Schwingungsbäuche enthielten, werden dann die Silbersalze zersetzt. Auf diese Weise hat Hr. G. Lippmann farbige Photographien hergestellt.

Sonst sind nach unserer bisherigen Kenntniſs die stehenden Schwingungen nur für die Akustik von Bedeutung.

§ 45. Das Huyghens'sche Princip unter der Voraussetzung pendelartiger Schwingungen.

Setzen wir

$$\psi = \frac{\cos(kr)}{r} \tag{200}$$

in welcher Annahme wir den Factor sin (nt) bez. cos (nt) fortgelassen haben, weil im Folgenden die Abhängigkeit der Function ψ von der Zeit nicht mehr in Betracht kommt, so wird dieser Werth für $r = 0$ unendlich; denn wenn wir cos (kr) in eine Reihe entwickeln und durch r dividiren, so ergiebt sich

$$\frac{\cos(kr)}{r} = \frac{1}{r} - \frac{k^2 . r}{1.2} + \frac{k^4 . r^3}{1.2.3.4} - + \ldots \tag{201}$$

worin das erste Glied für $r = 0$ unendlich wird, und ebenfalls wird auch der Differentialquotient nach r

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} - \frac{k^2}{1.2} + 3.\frac{k^4 . r^2}{1.2.3.4} - + \ldots \tag{201a}$$

für $r = 0$ unendlich.

Hätten wir es hier mit der Bewegung einer Flüssigkeit zu thun, so würde, wenn ψ das Geschwindigkeitspotential ist, $\frac{\partial \psi}{\partial r}$ die Flüssigkeitsmenge bedeuten, welche in Richtung des Radius strömt, und es würde also im Punkte $r = 0$ eine Ausströmung nach allen Richtungen des Radius stattfinden müssen, was natürlich bei substantieller Flüssigkeit nie der Fall sein kann; aber wir wissen, daſs auch bei unseren elektromagnetischen Schwingungen ein solches Ausströmen der Elektricität von einem Punkte nach allen Richtungen hin nicht stattfinden darf, weil die Dichtigkeit der wahren Elektricität in jedem geschlossenen Raume unverändert bleiben muſs, was bei einem solchen gleichzeitigen Abfliesen nach allen Seiten unmöglich ist.

Diese Form der Bewegung kann demnach nur unter Ausnahmsbedingungen für den Punkt $r = 0$ stattfinden, die für die anderen Punkte des Raumes nicht bestehen. Er wäre bei Bewegungen von Flüssigkeiten als ein Einströmungspunkt oder Ausströmungspunkt aus dem Raume zu bezeichnen.

Wenn wir daher nun in unsere Gleichung (193)

$$\int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega = \int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega$$

für ψ den in unserer Gleichung (200) angegebenen Werth benutzen wollen, so müssen wir uns den Punkt $r = 0$ mit einer kleinen Kugel umgeben denken, deren innerer Raum von dem Raume, über den wir die Integration erstrecken, ausgeschlossen wird. Als Integrationsfläche haben wir dann neben der äusseren Grenze des Integrationsraumes auch noch die Oberfläche der kleinen Kugel. Uebrigens behalten wir uns vor, den Radius dieser kleinen Kugel schliefslich bis über jede endliche Grenze hinaus klein werden zu lassen.

An der kleinen Kugel, welche den Punkt $r = 0$ umschliefst, fällt die Normale mit dem nach aufsen gerichteten Radius zusammen, und wir haben daher hier

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial N} &= \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ &= -\frac{1}{r^2} \cdot \cos(kr) - \frac{k \sin(kr)}{r} \end{aligned} \tag{200a}$$

Statt des Flächenelementes $d\omega$ wollen wir nun wieder das Element einer Kugelfläche vom Radius 1 einführen und dasselbe wie früher mit $d\Omega$ bezeichnen, so dafs wir also an der Oberfläche der kleinen Kugel haben

$$\begin{aligned} d\omega \cdot \frac{\partial \psi}{\partial r} &= \left(-\frac{1}{r^2} \cdot \cos(kr) - \frac{k \cdot \sin(kr)}{r}\right) \cdot r^2 \cdot d\Omega \\ &= \left(-\cos(kr) - k \cdot r \cdot \sin(kr)\right) \cdot d\Omega \end{aligned}$$

und für diese Oberfläche ergiebt sich

$$\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega = -\int \varphi \cdot \{\cos(kr) + k \cdot r \cdot \sin(kr)\} \cdot d\Omega \tag{202}$$

Lassen wir nun r sehr klein werden, so wird $\cos(kr) = 1$, während $k \cdot r \cdot \sin(kr) = 0$ wird, und es ist daher

$$\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega = -\int \varphi \cdot d\Omega \tag{203}$$

Wenn die Kugel sehr klein, und die Function φ continuirlich ist, so wird kein Unterschied der Werthe von φ im Innern und an

der Oberfläche der Kugel bestehen. Bezeichnen wir daher den Werth von φ im Punkte $r = 0$, also im Mittelpunkte der Kugel mit φ_0, so erhalten wir nunmehr für das Integral ausgedehnt über die Oberfläche der kleinen Kugel den Werth

$$\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega = -\varphi_0 \int d\Omega$$
$$= -4\pi \cdot \varphi_0 \tag{204}$$

Hiermit ist aber das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (193) noch nicht vollständig gebildet; denn es kommt noch der Theil hinzu, welcher über die äufsere Grenzfläche des Raumes zu nehmen ist. Dieser ist aber

$$\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega = \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega \tag{205}$$

Setzen wir nun diese Werthe in Gleichung (193) ein, so erhalten wir:

$$\int \frac{\cos(kr)}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega = -4\pi \cdot \varphi_0 + \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos kr}{r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega \tag{206}$$

wo auch das Integral der linken Seite nur über die äufsere Oberfläche erstreckt zu werden braucht, weil für die kleine Kugel $\frac{d\omega}{r} = r\,d\Omega$ und daher das Integral Null wird, oder

$$4\pi\varphi_0 = \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right) \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega - \int \frac{\cos(kr)}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega \tag{206a}$$

Bevor wir zu der physikalischen Interpretation dieser Gleichung übergehen, wollen wir dieselbe noch anders schreiben, indem wir wieder das Zeichen der Function ψ einführen. Wir erhalten dann

$$4\pi\varphi_0 = \int \left(\varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial N}\right) \cdot d\omega \tag{206b}$$

Wenn wir also für ψ eine den Factor $\cos(kr)$ enthaltende Function einführen, so können wir den Werth φ_0, d. h. den Werth, welchen φ in dem Punkte $r = 0$ hat, durch dieses über die äufseren Grenzen zu nehmende Integral finden.

Wir kehren nunmehr wieder zu unserer Gleichung (206a) zurück.

Den Werth der Function φ im Mittelpunkte oder eigentlich an der Oberfläche der kleinen Kugel, der aber mit dem Werthe in dem Mittelpunkte zusammenfällt, haben wir also dargestellt durch die Differenz zweier Integrale. Das zweite Integral können wir so auffassen, als wenn es von einer einfachen Schicht von Erregungspunkten herrührte, in deren Amplitude der Factor $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ vorkommt.

Das erste Integral hat eine etwas abweichende Form. Grenzintegrale derselben Art sind schon in § 41 vorgekommen und auch ihre Bedeutung ist dort kurz erörtert. Da der jetzt vorliegende Fall einfacher ist, so wiederhole ich diese Deutung hier etwas eingehender und ausführlicher.

Denken wir uns zu der Grenzfläche eine ihr in dem verschwindenden Abstande dN parallele Fläche construirt und nehmen wir an, dafs die beiden an den Enden einer solchen Normale gelegenen Punkte stets in dem entgegengesetzten Schwingungszustand sich befänden, d. h. dafs in jedem Augenblick ihre Entfernung von der Gleichgewichtslage gleich grofs, aber nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sei, so wird die Intensität ihrer Wirkung auf einen Punkt im Innern des Raumes sich nicht vollständig aufheben, sondern etwas verschieden sein, weil diese beiden Flächen etwas verschiedenen Abstand von ihm haben. Ist nun $-\frac{\varphi}{dN}$, wenn der Ausdruck erlaubt ist, gleich der Intensität der Bewegung in dem einen Erregungspunkte, so würde in dem Punkte, von dem aus r gerechnet wird, seine Wirkung gleich

$$-\frac{\varphi}{dN}\cdot\frac{\cos(kr)}{r}$$

sein; für den anderen, den äufseren Punkt, haben wir nun die Intensität $+\frac{\varphi}{dN}\cdot$ Aber es ist für diesen der Werth von r etwas gröfser, und es hat daher $\frac{\cos(kr)}{r}$ als Function von r einen etwas anderen Werth. Wir haben daher statt $\frac{\cos(kr)}{r}$ hier

$$\frac{\cos(kr)}{r}+\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right).dN$$

oder

$$\frac{\cos(kr)}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial N}.dN$$

zu setzen. Die Differentiation in dem zweiten Gliede dieses Ausdrucks mufs nach N erfolgen, weil nur die Zunahme in Betracht kommt, welche der Werth von r erleidet, wenn man in Richtung der Normale um dN vorwärts geht.

Die Gesammtwirkung beider Punkte ist also gleich

$$-\frac{\varphi}{dN}\cdot\frac{\cos(kr)}{r}+\frac{\varphi}{dN}\left\{\frac{\cos(kr)}{r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr)}{r}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial N}\cdot dN\right\}$$

Die beiden ersten Glieder heben sich, und es bleibt nur dasjenige Glied stehen, welches sich auf den Unterschied der Lage der beiden Schichten bezieht, nämlich

$$\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(k r)}{r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N}$$

Dieses ist aber die Gröfse, über welche das erste Oberflächenintegral in unserer Gleichung (206a) zu nehmen ist.

Wir können also in diesem Falle die ganze Bewegung im Innern, wenn nur die Function φ unserer Differentialgleichung (188) entspricht, auffassen als Superposition einer Reihe von kugelförmigen Wellen, welche von den Punkten der Grenzfläche ausgehen. Die Mittelpunkte dieser Wellensysteme bilden theils eine einfache Schicht, theils eine Doppelschicht, welche beide die Grenzfläche überziehen. Die Wellen der ersten Schicht sind in dem zweiten Integral dargestellt, und die Intensität derselben ist, wenn wir φ als Bewegungspotential auffassen, gleich der Intensität derjenigen Componente der Bewegung, welche senkrecht zur Grenzfläche steht. Die Intensität der Bewegung in der Doppelschicht von Erregungspunkten, von denen die eine positiv, die andere negativ genommen wird, ist gleich $\frac{\varphi}{d N}$.

Zur Charakterisirung des Unterschiedes zwischen den Wellenpotentialen und den Potentialfunctionen der anziehenden und abstofsenden Kräfte der Elektricität und des Magnetismus ist hier zu bemerken, dafs eine Potentialfunction der Elektricität im Innern eines abgegrenzten Raumes immer entweder als Potentialfunction einer einfachen Schicht, die längs der Oberfläche des Körpers liegt, oder als Potentialfunction einer Doppelschicht dargestellt werden kann; bei den Wellenpotentialen aber hat man keine solche freie Wahl, wie man schon daraus schliefsen kann, dafs Wellenpotentiale bestehen können, die im Innern einer Kugel von Null verschieden, und längs der ganzen Oberfläche gleich Null sind, so dafs also hier keine Bewegung vorhanden ist.

Setzen wir in unserer Gleichung (193)

$$\psi = \frac{\sin(k r)}{r} \tag{207}$$

so ist die ganze Untersuchung sehr ähnlich der soeben angestellten, nur brauchen wir keinen Punkt von dem betrachteten Raume auszuschliefsen. Bilden wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin(kr)}{r}\right)$$

$$= -\frac{1}{r^2} \cdot \sin(kr) + \frac{k \cdot \cos(kr)}{r} \tag{207a}$$

und multipliciren mit $r^2 . d\,\Omega$, so erhalten wir

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot r^2 . d\,\Omega = \left(-\sin(kr) + k . r . \cos(kr)\right) d\,\Omega \tag{208}$$

Für $r = 0$ verschwinden beide Glieder, das erste, weil $\sin(kr) = 0$ wird, und das zweite, weil es noch den Factor r enthält. Unter diesen Umständen wird auf der rechten Seite der Gleichung (193) das Integral über die Oberfläche der kleinen Kugel gleich Null, während in den beiden anderen Integralen nur $\cos(kr)$ durch $\sin(kr)$ zu ersetzen ist. Wir erhalten also

$$0 = \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin(kr)}{r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\,\omega - \int \frac{\sin(kr)}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\,\omega \tag{209}$$

oder

$$\int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin(kr)}{r}\right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\,\omega = \int \frac{\sin(kr)}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\,\omega \tag{209a}$$

Diese Gleichungen sagen aber nur aus, dafs diese beiden Integrale, wenn wir sie über einen begrenzten Raum ausdehnen, einander gleich sind. Sie bleiben unverändert, wenn wir in ihnen φ mit $\frac{\sin(kr)}{r}$ vertauschen. Da die Function $\frac{\sin(kr)}{r}$ ebenso wie die Function φ keinen Ausnahmspunkt hat, so war auch eigentlich kein anderes Ergebnifs zu erwarten.

Es könnten nun noch im Innern des betreffenden Raumes Erregungspunkte liegen, die dann für φ als Ausnahmspunkte zu betrachten sein würden. Das ergäbe ganz ähnliche Verhältnisse für φ, wie wir sie für ψ soeben besprochen haben. Es ist daher nicht nöthig, darauf noch besonders einzugehen.

Vierter Theil.
Die Beugung des Lichtes.

Erster Abschnitt.
Allgemeines.

§ 46. Die physikalischen Bedingungen der Beugungserscheinungen.

Die bisher bei den Raumintegralen angenommenen Grenzen brauchen gar keine physischen Grenzen zu sein, sondern wir können auch eine nur gedachte Grenzfläche als solche behandeln. Wenn wir also in der Oberfläche irgend eines Raumes an den einzelnen Stellen die Werthe von φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ kennen, so können wir mittels der früher abgeleiteten Sätze die Werthe von φ an einer beliebigen Stelle im Innern des Raumes finden. Von Wichtigkeit sind nun besonders diejenigen Fälle, bei welchen die bestehende physische Grenzfläche nicht ganz vollständig ist.

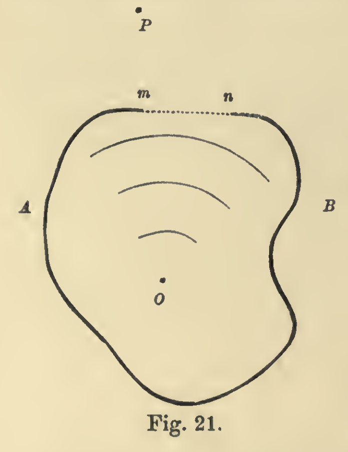


Fig. 21.

Eine Scheidewand AB (Fig. 21), die den Punkt O, von dem die Lichtbewegung ausgeht, nur unvollständig umschliesst, weil sie die Oeffnung mn enthält, können wir durch eine gedachte Fläche mn vervollständigen und den Raum jenseits derselben als durch sie begrenzt betrachten.

Für die hier folgende Untersuchung werde angenommen, dafs die Wellen, welche auf einen solchen undurchsichtigen Schirm auftreffen, an ihm vollständig vernichtet werden. Diese Annahme ist zwar nicht experimentell zu verwirklichen, denn

die Lichtwellen werden selbst von den schwärzesten und undurchsichtigsten Körpern, die wir ihnen entgegen stellen können, nur unvollständig zerstört; aber es giebt doch Körper, die sehr nahehin die Eigenschaft haben, die auf sie auffallenden Lichtstrahlen weder durchzulassen, noch in merklichem Grade zu reflectiren. Wenn wir also diese Eigenschaft bei unserem Schirme als vollständig vorhanden annehmen, so kann man die Werthe der Funktion φ und ihrer Differentialquotienten in der idealen Grenzfläche als durch die hier einfallenden Wellen gegeben betrachten und völlig von den Lichtbewegungen absehen, welche auf die anderen Theile des Schirmes treffen. Für alle Punkte, welche jenseits, d. h. aufserhalb des Schirmes liegen, sind dann die Punkte dieser Fläche als die Punkte einer Erregungsfläche anzusehen, in der die Differentialquotienten von φ und die Function φ selbst für jeden Punkt der idealen Grenzfläche als Functionen der Zeit gegeben sind. Durch Berechnung der Integrale kann man dann die Bewegungen finden, welche in einem beliebigen Punkt P des äufseren Raumes durch die Anstöfse erregt worden, welche von der Fläche der Oeffnung $m\,n$ ausgehen.

Die sich hier ergebenden Erscheinungen sind diejenigen, welche man in der Optik als Beugung oder Diffraction des Lichtes bezeichnet. Sie sind namentlich deshalb von Wichtigkeit und Interesse, weil sich durch ihre eingehendere Betrachtung zeigen wird, weshalb sich die Lichtstrahlen in den meisten Fällen, die wir in alltäglicher Erfahrung vor Augen haben, in gerader Richtung fortbewegen, und weshalb nur ausnahmsweise Erscheinungen sichtbar werden, bei denen Lichtstrahlen um die Ecke herum zu gehen scheinen.

§ 47. Vereinfachung des Huyghens'schen Princips durch ausschliefsliche Berücksichtigung grofser Abstände von der beugenden Oeffnung.

Als wir in § 43 den Green'schen Satz für Functionen entwickelten, welche der Differentialgleichung (188)

$$\Delta \varphi + k^2 . \varphi = 0$$

genügen, fanden wir die allgemeine Gleichung (193)

$$\int \varphi \cdot \frac{\partial \psi}{\partial N} \cdot d\omega = \int \psi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot d\omega$$

Je nachdem wir nun in § 44 einmal

$$\psi = \frac{\cos k r}{r}$$

und das andere Mal

$$\psi = \frac{\sin k r}{r}$$

setzten, ergaben sich die Gleichungen (206a) und (209)

$$4 \pi \varphi_0 = \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos(k r)}{r} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega - \int \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot \frac{\cos(k r)}{r} \cdot d\omega$$

und

$$0 = \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\sin(k r)}{r} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega - \int \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot \frac{\sin(k r)}{r} \cdot d\omega$$

worin φ_0 den Werth von φ in dem Punkte $r = 0$, also in dem Punkte, von dem aus r gerechnet wird, bezeichnet.

Wir wollen in diese Gleichungen nun wieder den Factor einführen, der die behandelten Bewegungen als einfache pendelartige Schwingungen charakterisirt. Wir nehmen dazu aber nicht wie früher $\cos(n t)$ bez. $\sin(n t)$, sondern fügen noch eine beliebige Phasenconstante δ hinzu, und multipliciren die erste Gleichung mit $\cos(n t + \delta)$, die zweite mit $\sin(n t + \delta)$. Da diese beiden Factoren gar nicht von r abhängen, so können wir die Multiplication unter dem Differentialzeichen vornehmen und erhalten dann durch Addition beider Gleichungen und geeignete Zusammenfassung

$$4 \pi \varphi_0 . \cos(n t + \delta) = \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos(k r - n t - \delta)}{r} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega$$

$$- \int \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot \frac{\cos(k r - n t - \delta)}{r} \cdot d\omega \tag{210}$$

Dadurch werden die Functionen wieder abhängig von der Zeit, und zwar wechselt der Factor, welcher diese Abhängigkeit ausdrückt, in seinem absoluten Betrage zwischen 0 und 1.

Was nun das erste Integral der rechten Seite betrifft, so haben wir früher schon gesehen, dafs Integrale dieser Form in zwei Theile zerfallen. Der eine Theil hat r in erster Potenz im Nenner, und stellt also eine Wellenbewegung dar, deren Amplitude wie $\frac{1}{r}$ abnimmt. Es ist dieses die langsamste Art der Abnahme, welche beim Fortschreiten kugelförmiger Wellen vorkommt; der andere Theil enthält den Factor $\frac{1}{r^2}$; die durch ihn dargestellten Wellen nehmen also schneller ab und verschwinden in gröfserer Entfernung gegen die erst genannten Glieder, so dafs man in Entfernungen, welche relativ grofs gegen die Wellenlänge sind, diese Glieder, welche r^2 im Nenner haben, gegen die anderen im allgemeinen vernachlässigen

kann. Es tritt nämlich in dem zweiten Theile noch der Factor $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ hinzu, welcher selbst sehr grofs ist, und wir können daher die folgende Betrachtung darüber anstellen, von wann an diese Vernachlässigung gestattet ist.

Es ist

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\cos(kr - nt - \delta)}{r}\right) &= -\frac{1}{r^2}.\cos(kr - nt - \delta) - \frac{k.\sin(kr - nt - \delta)}{r} \\ &= -\frac{1}{r^2}\left[\cos(kr - nt - \delta)\right. \\ &\qquad \left. + kr.\sin(kr - nt - \delta)\right]\end{aligned}\right\} \quad (211)$$

Da nun nach Gleichung (187)

$$kr = \frac{2\pi . r}{\lambda}$$

so wird dieser Factor des zweiten Gliedes, sobald r im Vergleich zu der Wellenlänge λ unendlich grofs, ebenfalls unendlich grofs, und wir können dann das erste Glied gegen das zweite vernachlässigen. Wenn also die Wellenlänge unendlich klein gegen die Entfernung r ist, reducirt sich das erste Integral auf der rechten Seite unserer Gleichung (210) auf

$$-\int \varphi \cdot \frac{k.\sin(kr - nt - \delta)}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega$$

und es erhält demnach dieses Integral, von dem wir früher (§ 45) sahen, dafs es als das Wellenpotential einer Doppelschicht von Erregungspunkten, die längs der betreffenden Oberfläche liegt, aufgefafst werden konnte, nunmehr die Form des Wellenpotentiales einer einfachen Schicht. Die Gleichung (210) können wir jetzt schreiben:

$$\left.\begin{aligned}4\pi\varphi_0 . \cos(nt + \delta) = &-\int \varphi \cdot k \cdot \frac{\sin(kr - nt - \delta)}{r} \cdot \frac{\partial r}{\partial N} \cdot d\omega \\ &-\int \frac{\partial \varphi}{\partial N} \cdot \frac{\cos(kr - nt - \delta)}{r} \cdot d\omega\end{aligned}\right\} \quad (212)$$

§ 48. Allgemeine Betrachtungen über die vorkommenden Integralformen.

Die trigonometrischen Functionen, über welche wir in den hier vorkommenden Gleichungen zu integriren haben, wechseln zwischen den Werthen $+1$ und -1, und zwar wechseln sie in der Regel sehr schnell zwischen diesen Grenzwerthen; da sie jedesmal den ganzen

Cyclus durchlaufen, wenn die Entfernung r um die Wellenlänge λ zu- oder abnimmt. Die Entfernungen, welche hier für gewöhnlich in Betracht kommen, sind nun aber, verglichen mit den Wellenlängen des Lichtes, sehr grofs, da die letzteren Gröfsen sind, welche den tausendsten bis dreitausendsten Theil eines Millimeters bilden, also sehr klein im Vergleich zu allen sichtbaren Dimensionen sind. Es kommen nur ausnahmsweise einzelne Erscheinungen vor, bei denen wir das Verhältnifs der sonstigen in die Rechnung eingehenden Entfernungen zu den Wellenlängen nicht als unendlich grofs anzunehmen haben. In unseren Integralen wechselt also der eine Factor in sehr kurzen Zwischenräumen zwischen positiven und negativen Werthen, stellt dabei aber immer einen echten Bruch dar, während die anderen in dem Integral vorkommenden Factoren sich verhältnifsmäfsig langsam ändern. Die Integrale selbst werden dadurch in eine Reihe von Schichten und Streifen zerlegt, welche abwechselnd entgegengesetztes Zeichen haben und sich also bei der Addition gegenseitig von einander abziehen, so dafs im allgemeinen, abgesehen von jenen Ausnahmefällen, sich die Werthe dieser Integrale auf sehr kleine Gröfsen reduciren. Wenn wir ein solches Integral haben, z. B.

$$\int_a^b \varphi_{(z)} \,.\, \cos(kz) \,.\, dz$$

so können wir dasselbe, vorausgesetzt, dafs φ eine continuirliche Function von z ist, immer durch partielle Integration umformen, indem wir den Factor $\cos(kz)$ nach z integriren; wir erhalten dann:

$$\int_a^b \varphi_{(z)} \,.\, \cos(kz) \,.\, dz = \overline{\underline{\frac{1}{k} \,.\, \sin(kz) \,.\, \varphi_{(z)}}} - \frac{1}{k} \int_a^b \sin(kz) \cdot \frac{\partial \varphi_{(z)}}{\partial z} \,.\, dz \tag{213}$$

Wenn nun $\varphi_{(z)}$ lauter endliche Werthe hat, so würde das erste Glied endlich sein, da man diese endlichen Werthe für die beiden Grenzen mit $\sin(kz)$ zu multipliciren und dann von einander zu subtrahiren hat, wodurch sie also auch nur eine endliche Differenz geben können. Wenn $\varphi_{(z)}$ für a und b von Null verschieden ist, so würde dieser erste Theil also gleich sein

$$\overline{\underline{\frac{1}{k} \,.\, \sin(kz) \,.\, \varphi_{(z)}}} = \frac{1}{k} \cdot \sin(kb) \,.\, \varphi_{(b)} - \frac{1}{k} \,.\, \sin(ka) \,.\, \varphi_{(a)} \tag{214}$$

Es könnte im allgemeinen noch vorkommen, dafs auch innerhalb der Integration Sprünge in dem Werthe von $\varphi_{(z)}$ eintreten, die dann als Grenzen des Integrationsintervalls berücksichtigt werden müfsten.

Das zweite Glied ist dem ursprünglichen Integral sehr ähnlich; für $\varphi_{(z)}$ ist der Differentialquotient $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ eingetreten, und aufserdem ist noch der Factor $\frac{1}{k}$ hinzugekommen. Indem wir wieder partiell integriren, ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{k}\cdot\int_a^b \frac{\partial \varphi_{(z)}}{\partial z}\sin(kz)\,dz = &-\overline{\underline{\frac{1}{k^2}\cos(kz)\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z}}}\\ &+\frac{1}{k^2}\int_a^b \cos(kz)\cdot\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\,dz\end{aligned}\right\}\quad(215)$$

Es ist also:

$$\left.\begin{aligned}\int_a^b \varphi\,.\cos(kz)\,dz = &\overline{\underline{\frac{1}{k}\cdot\varphi_{(z)}\,.\sin(kz)}} + \frac{1}{k^2}\cdot\overline{\underline{\frac{\partial \varphi_{(z)}}{\partial z}\cdot\cos(kz)}}\\ &-\frac{1}{k^2}\int_a^b \frac{\partial^2 \varphi_{(z)}}{\partial z^2}\cdot\cos(kz)\,.\,dz\end{aligned}\right\}\quad(213\text{a})$$

Durch weitere Integration tritt also jedesmal der Factor $\frac{1}{k}$ hinzu, und da nun

$$\frac{1}{k} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

eine sehr kleine Gröfse ist, so verschwinden die folgenden Glieder, vorausgesetzt, dafs bei fortgesetzten Differentiationen nicht Unstetigkeiten der höheren Differentialquotienten hinein kommen, die dann weiter berücksichtigt werden müssen. In den meisten Fällen kann man schon nach dem ersten Gliede die Reihe abbrechen und die folgenden Glieder vernachlässigen. Es wäre dann also

$$\int_a^b \varphi\,.\cos(kz)\,.\,dz = \overline{\underline{\frac{1}{k}\cdot\varphi_{(z)}\,.\sin(kz)}}\qquad(213\text{b})$$

Wenn aber die eine Grenze $z = 0$ ist, und an der anderen Grenze $\varphi = 0$, so würde das erste Integral überhaupt verschwinden, und es müssen dann die folgenden Glieder beachtet werden. Dergleichen Fälle kommen vielfach vor.

Die partielle Integration darf man immer nur so lange fortsetzen, als die entstehenden Differentialquotienten innerhalb der

ganzen Ausdehnung der Integration endlich sind. Sobald man auf einen Differentialquotienten stöfst, der unendlich ist, mufs die Entwicklung abgebrochen werden.

Im allgemeinen sind die Integrale, auf welche wir bei der Beugung geführt werden, sehr schwierig und erfordern zum Theil eine weitläufige Rechnung. Es war zuerst ein deutscher Physiker, Schwerd, welcher diese Rechnungen in grofser Breite durchgeführt und eine Menge von einzelnen Fällen behandelt hat. In dem Handbuche der Optik von G. Radicke sind ebenfalls sehr viele specielle hierher gehörige Integrationen ausgeführt.

Man kann eine ganze Anzahl von verschiedenartigen Figuren herstellen, die sich zur Beobachtung der Diffraction eignen, z. B. geradlinige Schirme mit Ausschnitten oder ohne Ausschnitte, die selbst wieder die verschiedensten Formen haben können, bald quadratische, bald rechteckige, bald dreieckige. Sie können theils einzeln, theils zu Systemen verbunden, benutzt werden. Dadurch wird eine ungeheure Mannigfaltigkeit der Erscheinungen hervorgerufen. Die wichtigsten Folgerungen knüpfen sich an die Benutzung rechtwinkliger Oeffnungen.

Bevor wir aber hierauf eingehen, wollen wir zunächst den einfacheren Fall einer runden Oeffnung behandeln.

Zweiter Abschnitt.

Beugung an einer einzelnen Oeffnung.

§ 49. Beugung ebener Wellen an einer runden Oeffnung.

Wir wollen annehmen, es sei ein Zug ebener Wellen, der von einem unendlich entfernten Punkte ausgeht, bis zu einer bestimmten Grenzfläche gekommen, welche eine Oeffnung in einem schwarzen Schirm ausfüllt. Die Fortsetzung dieses Wellenzuges auf der anderen Seite des Raumes können wir dann, wie gezeigt ist, als Folge der Erschütterungen auffassen, in welche die Punkte dieser Grenzfläche gekommen sind. Nach der Betrachtung, die wir eben gemacht haben, müfste dann eine Intensität der Erregung an dieser Grenzfläche angenommen werden, welche abhängig ist von $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$, φ und $\frac{\partial r}{\partial N}$.

Nun haben $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ und φ bei einem Zug ebener Wellen in der ganzen Breite der Oeffnung constanten Werth, und $\frac{\partial r}{\partial N}$ würden wir, wenn die Oeffnung klein ist gegen die in Betracht kommenden Entfernungen r, und wenn die Entfernung des Punktes, in dem man die Lichtbewegung untersuchen will, von einer auf der Oeffnung errichteten Normalen im Verhältniss zu r klein ist, als sehr wenig von 1 verschieden annehmen können. Wir können demnach die in Gleichung (212) vorkommenden Factoren, welche die Grösse der Amplitude in der Oeffnung bedingen, in eine Constante A zusammenfassen. Da es ferner in diesem Falle nicht nöthig ist, die Abhängigkeit von der Zeit besonders zu berücksichtigen, und da es hier auf eine allen Schwingungen hinzugefügte constante Phasendifferenz nicht ankommt, so kann man für einen solchen Punkt die Bewegung ausdrücken durch die Gleichung

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\int A \cdot \frac{\cos(kr)}{r} \cdot d\omega \tag{216}$$

worin r die Entfernung des Punktes, auf den sich φ bezieht, von den einzelnen Punkten der Oeffnung, und $d\omega$ ein Element der letzteren bezeichnet. Die Oeffnung, über welche das Integral auszudehnen ist, wollen wir uns durch Polarcoordinaten zerlegt denken. Wir bezeichnen mit ϱ die Entfernung eines Punktes der Oeffnung von dem Fuſspunkte des Lothes, welches von dem Punkte, für den wir die Wirkung suchen, auf die ebene Grenzfläche gefällt ist. Wir wollen ferner von dem Fuſspunkte des Lothes zwei Gerade gezogen denken, welche das Winkelelement $d\alpha$ einschlieſsen; dann wäre ein Flächenelement gleich $\varrho . d\alpha . d\varrho$ zu setzen. Ist z die Länge des Lothes, welches von dem Punkte, für den wir die Wirkung suchen, auf die Ebene gefällt ist, so ist

$$r^2 = z^2 + \varrho^2$$

und daraus folgt durch Differentiation, da für die einzelnen Punkte der Oeffnung die Entfernung z unveränderlich bleibt

$$2r.dr = 2\varrho.d\varrho$$

so daſs wir also für das Oberflächenelement $d\omega$ erhalten:

$$d\omega = r.dr.d\alpha$$

Setzen wir nun diesen Werth für $d\omega$ in das Integral der Gleichung (216) ein, so hebt sich r im Zähler und Nenner, und es ergiebt sich das verhältniſsmäſsig einfache Integral:

$$\varphi = \frac{A}{4\pi}\iint \cos(kr).dr.d\alpha \tag{216a}$$

wobei die Integrationen über α und r in den Grenzen auszuführen sind, welche der Oeffnung entsprechen.

Bisher haben wir noch keinen Gebrauch davon gemacht, dafs wir die Gestalt der Oeffnung kreisförmig angenommen haben. Dieses wollen wir nunmehr berücksichtigen und aufserdem festsetzen, dafs der Punkt, für welchen die Bewegung untersucht werden soll, auf dem Lothe liege, welches im Mittelpunkt des Kreises errichtet ist. Dann können wir ohne weiteres nach α integriren, weil jeder Ringstreifen in ganzer Länge in der Oeffnung enthalten ist. Das Integral bekommt dadurch den Factor 2π, und es ergiebt sich

$$\varphi = \frac{A}{2}\int \cos(kr) \,.\, dr$$

$$= \frac{A}{2k} \,.\, \overline{\underline{\sin(kr)}} \tag{217}$$

Die obere Grenze der Integration ist gegeben durch den Rand und die untere durch den Mittelpunkt der Oeffnung. Den Werth von r für den Rand wollen wir nun mit R bezeichnen; dann erhalten wir, da der Werth von r für den Mittelpunkt schon mit z bezeichnet ist,

$$\varphi = \frac{A}{2k} \,.\, [\sin(kR) - \sin(kz)] \tag{217a}$$

Hierin ist $\frac{A}{2k}$ ein constanter Factor, während die Differenz der beiden Sinuswerthe mit der Lage des Punktes sich ändert. Beziehen wir unseren Werth auf verschiedene Punkte in der Axe, so ist zwar stets R gröfser als z, und damit auch kR gröfser als kz; aber der Unterschied wird immer kleiner, je weiter wir von der Oeffnung abgehen. Jedesmal, wenn kR und kz um 2π oder ein Vielfaches von 2π, also R und z um λ oder ein Vielfaches von λ differiren, wird die Differenz der beiden Sinus verschwinden. Es giebt also in der Axe eine Reihe von Stellen, in denen der Werth von φ gleich Null wird, d. h. keine Lichtbewegung vorhanden ist; dazwischen liegen Strecken, wo einer der beiden Sinuswerthe überwiegt, und wo demnach Bewegung besteht. Das Phänomen zeigt sich also wesentlich darin, dafs in der Länge der Axe hinter einander eine Reihe von Nullpunkten auftreten, die nicht vorhanden sein würden, wenn die vorhandenen Wellen sich einfach weiter fortpflanzen würden.

Für sehr entfernte Punkte auf der Axe wird R ebenso lang sein wie z, und es werden daher in sehr grofsem Abstand von der Oeffnung solche Unterbrechungen nicht mehr eintreten. Der erste, d. h.

der entfernteste Punkt, in dem die Lichtbewegung verschwindet, wird derjenige Punkt sein, wo R um eine Wellenlänge gröfser ist als z, die anderen, welche da liegen, wo diese Differenz zwei, drei Wellenlängen beträgt, rücken immer näher und näher zu einander, bis sie endlich nur eine Wellenlänge von einander entfernt sind, denn dicht vor der Mitte der Oeffnung wird die Entfernung von der Peripherie sich gar nicht mehr ändern.

Wir haben hier einen der einfachsten Fälle, in welchem sich zeigt, dafs die Wirkungen, die von verschiedenen Theilen der Oeffnung ausgehen, sich gegenseitig aufheben können.

§ 50. Aufstellung der Gleichung für die Beugung kugelförmiger Wellen an einer beliebigen Oeffnung.

Wir wollen nun voraussetzen, dafs in dem Schirm eine beliebig gestaltete Oeffnung sich befindet, deren Gröfse klein ist im Vergleich zu ihrer Entfernung sowohl von dem leuchtenden Punkte, als von dem Punkte, für den wir die Wirkung suchen. Die Entfernung des leuchtenden Punktes von der Oeffnung sei aber doch endlich, so dafs an dieser keine ebenen, sondern kugelförmige Wellen anlangen. In die Ebene der Oeffnung legen wir die xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems, und zwar legen wir, weil man später eine Reihenentwicklung nach den Coordinaten der Oeffnung ausführen mufs, und es vortheilhaft ist, die Glieder derselben möglichst klein zu halten, den Anfangspunkt der Coordinaten in die Oeffnung. Es sei dann (Fig. 22) $x_1\, y_1\, z_1$ der leuchtende Punkt, und $x_0\, y_0\, z_0$ derjenige, für welchen die Wirkung gesucht wird. Die Punkte bez. die Flächenelemente in der Oeffnung haben die laufenden Coordinaten $x\, y$, weil für sie $z = 0$ ist. Die Entfernung von einem Flächenelemente $x\, y$ bis zum Punkte $x_1\, y_1\, z_1$ sei mit r_1, und bis zum Punkte $x_0\, y_0\, z_0$ mit r_0 bezeichnet. Der Zug von Kugelwellen, welcher von dem leuchtenden Punkte $x_1\, y_1\, z_1$ ausgegangen ist, möge das Wellenpotential:

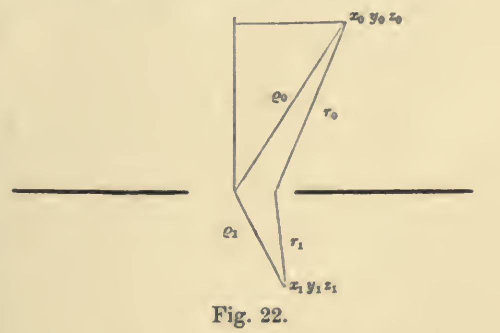


Fig. 22.

$$\varphi_1 = \frac{\cos(k\, r_1 - n\, t - \delta)}{r_1} \tag{218}$$

besitzen. In diesem Werthe ändert r_1 seine Länge mit der Lage des Punktes in der Oeffnung; aber der Einflufs, welchen diese Aenderung im Nenner auf den Werth von φ_1 ausübt, verschwindet gegenüber dem Einflufs, welchen die Aenderung im Zähler bewirkt; denn in letzterem wird eine sehr kleine Lagenänderung schon den Werth des Cosinus von -1 in $+1$ verwandeln können, während eine eben solche Veränderung für den Nenner verschwindet. Wir können daher den Nenner r_1 bei kleiner Oeffnung als eine Constante behandeln. Dasselbe ist der Fall mit der Neigung von r_1 gegen die verschiedenen Theile der Oeffnung. Wir erhalten ferner:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial N} = -k \cdot \frac{\sin(k r_1 - n t - \delta)}{r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \tag{219}$$

Denn beim zweiten bei der Differentiation auftretenden Gliede fehlt erstens der Factor k und zweitens erscheint im Nenner die zweite Potenz von r_1, so dafs dies Glied gegen das erste verschwindet.

Bezeichnen wir nun mit Φ_0 das Wellenpotential im Punkte $x_0 y_0 z_0$ selbst, so mufs in der Oeffnung Φ_0 in jedem Augenblicke mit φ_1 übereinstimmen. Das giebt uns die Möglichkeit, Φ_0 zu bestimmen. Wir denken uns zu dem Zweck φ_1 in die beiden Theile zerlegt:

$$\varphi_1 = \frac{\cos k r_1}{r_1} \cos(n t + \delta) + \frac{\sin k r_1}{r_1} \sin(n t + \delta)$$

und dementsprechend wie in (219)

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial N} = -k \frac{\sin k r_1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial N} \cos(n t + \delta) + k \frac{\cos k r_1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial N} \sin(n t + \delta)$$

und wenden auf jeden Theil die Gleichung (212) an. Um sie auf den zweiten Theil anzuwenden, ist in (212) δ durch $\delta - \frac{\pi}{2}$ zu ersetzen, wodurch $\cos(n t + \delta)$ in $\sin(n t + \delta)$, $\sin(k r - n t - \delta)$ in $\cos(k r - n t - \delta)$ und $\cos(k r - n t - \delta)$ in $-\sin(k r - n t - \delta)$ übergeht. Da r in (212) bedeutet die Entfernung vom Punkte $x_0 y_0 z_0$, die wir hier mit r_0 bezeichnen wollen und die Normale ist nach derjenigen Seite der Oeffnung gezogen, auf der der Punkt $x_0 y_0 z_0$ liegt. So erhalten wir

$$4\pi \Phi_0 = -\int \frac{\cos k r_1}{r_1} \cdot k \frac{\sin(k r_0 - n t - \delta)}{r_0} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} d\omega$$
$$+ \int k \frac{\sin k r_1}{r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \cdot \frac{\cos(k r_0 - n t - \delta)}{r_0} d\omega$$

$$-\int \frac{\sin k r_1}{r_1} \cdot k \frac{\cos(k r_0 - n t - \delta)}{r_0} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} d\omega$$

$$+\int k \frac{\cos k r_1}{r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \cdot \frac{\sin(k r_0 - n t - \delta)}{r_0} d\omega$$

Wir setzen nun voraus, dafs die Linien r_0 und r_1 nahezu auf der Oeffnung senkrecht stehen. Dann ist bis auf Gröfsen zweiter Ordnung $\frac{\partial r_1}{\partial N} = +1$ und $\frac{\partial r_0}{\partial N} = -1$, und es wird

$$4\pi \Phi_0 = \frac{2k}{r_1 r_0} \cdot \int \sin\left(k(r_1 + r_0) - n t - \delta\right) d\omega \tag{220}$$

Zunächst müssen wir nun die Werthe von r_1 und r_0 nach Potenzen der Gröfsen x und y entwickeln, welche in ihnen enthalten sind. Es ist:

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + z_1^2 \\ &= x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - 2 x x_1 - 2 y y_1 + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} r_0^2 &= (x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z_0^2 \\ &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2 x x_0 - 2 y y_0 + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun mit ϱ_1 bez. ϱ_0 die Entfernung der Punkte $x_1 y_1 z_1$ bez. $x_0 y_0 z_0$ von dem Anfangspunkt der Coordinaten, so erhalten wir:

$$r_1^2 = \varrho_1^2 - 2 x x_1 - 2 y y_1 + x^2 + y^2 \tag{221}$$

und

$$r_0^2 = \varrho_0^2 - 2 x x_0 - 2 y y_0 + x^2 + y^2 \tag{222}$$

Nun ist aber zu berücksichtigen, dafs unter den gemachten Annahmen x^2 und y^2 gegenüber den anderen Gliedern vernachlässigt werden können, da sie Quadrate von innerhalb der Oeffnung gelegenen Punkten und daher unendlich klein vom zweiten Grade sind. Wir erhalten also in ausreichender Annäherung:

$$r_1^2 = \varrho_1^2 - 2 x x_1 - 2 y y_1 \tag{221a}$$

und

$$r_0^2 = \varrho_0^2 - 2 x x_0 - 2 y y_0 \tag{222a}$$

Indem wir nun hieraus nach dem binomischen Lehrsatz die Werthe für r_1 und r_0 entwickeln, ergiebt sich

$$\begin{aligned} r_1 &= \varrho_1 \cdot \sqrt{1 - \frac{2 x x_1}{\varrho_1^2} - \frac{2 y y_1}{\varrho_1^2}} \\ &= \varrho_1 \cdot \left(1 - x \cdot \frac{x_1}{\varrho_1^2} - y \cdot \frac{y_1}{\varrho_1^2} - \ldots\right) \end{aligned}$$

und ein analoger Werth für r_0. Wenn wir nun die weiteren Glieder als unendlich klein von höherer Ordnung fortlassen, so ist:

$$r_1 = \varrho_1 \cdot \left(1 - x \cdot \frac{x_1}{\varrho_1^2} - y \cdot \frac{y_1}{\varrho_1^2}\right) \tag{221b}$$

und

$$r_0 = \varrho_0 \cdot \left(1 - x \cdot \frac{x_0}{\varrho_0^2} - y \cdot \frac{y_0}{\varrho_0^2}\right) \tag{222b}$$

Da nun x_1 und y_1 klein gegen r_1, bez. x_0 und y_0 gegen r_0, so stellen die Quotienten $\frac{x_1}{\varrho_1}$, $\frac{y_1}{\varrho_1}$, $\frac{x_0}{\varrho_0}$ und $\frac{y_0}{\varrho_0}$ die Winkel dar, welche durch Projection der Winkel (ϱ_1, z) und (ϱ_0, z) auf die xz- bez. yz-Ebene entstehen. Bezeichnen wir nun mit α_1, β_1, α_0 und β_0 die positiv oder negativ gerechneten Gröfsen dieser Winkel, indem wir dabei die Richtung von ϱ_1 und ϱ_0 so festsetzen, wie die Wellen laufen und die Projectionen positiv rechnen, wenn sie auf die Seite der positiven x- oder y-Axe fallen, so ist

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{x_1}{\varrho_1} & \beta_1 &= -\frac{y_1}{\varrho_1} \\ \text{und} \quad \alpha_0 &= \frac{x_0}{\varrho_0} & \beta_0 &= \frac{y_0}{\varrho_0} \end{aligned}\right\} \tag{223}$$

Wir erhalten so

$$r_1 = \varrho_1 + x \cdot \alpha_1 + y \cdot \beta_1 \tag{221c}$$

und

$$r_0 = \varrho_0 - x \cdot \alpha_0 - y \cdot \beta_0 \tag{222c}$$

oder

$$r_1 + r_0 = \varrho_1 + \varrho_0 + x \cdot (\alpha_1 - \alpha_0) + y \cdot (\beta_1 - \beta_0) \tag{224}$$

Setzen wir nun diesen Werth in Gleichung (220) ein, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{k}{r_1 r_0} \cdot \int \sin \{ & k(\varrho_1 + \varrho_0) + kx(\alpha_1 - \alpha_0) \\ & + ky(\beta_1 - \beta_0) - nt - \delta \} \, d\omega \end{aligned}\right\} \tag{220a}$$

Da nun unsere Phasenconstante δ ganz willkürlich zu bestimmen ist, so können wir

$$\delta = k(\varrho_1 + \varrho_0) - \frac{\pi}{2}$$

setzen. Hierdurch haben wir nur den Anfangspunkt der Zeit, also den Zeitmoment, wo die Lichtbewegung mit einem Maximum von dem leuchtenden Punkte $x_1 y_1 z_1$ ausgeht, festgelegt, und es wird

$$\Phi_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{k}{r_0 r_1} \cdot \int \cos \{ kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0) - nt \} \, . \, d\omega \tag{220b}$$

oder, wenn wir das Oberflächenelement mit $dx.dy$ bezeichnen und

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{k}{r_0 r_1} = C$$

also gleich einer Constanten setzen:

$$\Phi_0 = C . \iint \cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0) - nt\} . dx.dy \quad (220c)$$

$$\left.\begin{aligned} = C . \Big[\iint \cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0)\} \cos nt . dx.dy \\ + \iint \sin \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0)\} \sin nt . dx.dy \Big] \end{aligned}\right\} \quad (220d)$$

§ 51. Ausführung der Integration bei einer rechteckigen Oeffnung.

Wir wollen nun annehmen, dafs die Oeffnung rechteckig ist, ihre Seiten den Coordinatrichtungen x und y parallel sind, und ihr Mittelpunkt Anfangspunkt der Coordinaten ist; dann liegt der eine Rand der Oeffnung eben so weit von dem Anfangspunkte der Coordinaten ab, wie der andere, so dafs man also von einem bestimmten negativen Werthe von x bis zu einem gleich grofsen positiven Werthe von x, und ebenso von einem negativen y bis zu einem gleich grofsen positiven y zu integriren hat. Da nun der Sinus entgegengesetzte Zeichen für gleiche Werthe des x und y auf den beiden Hälften der Oeffnung hat, so hebt sich dieser Theil des Integrals weg, und es bleibt nur derjenige Theil bestehen, der die Cosinuswerthe enthält. Indem wir nun $\cos \{kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0)\}$ zerlegen in $\cos kx(\alpha_1 - \alpha_0) . \cos ky(\beta_1 - \beta_0) - \sin kx(\alpha_1 - \alpha_0) . \sin ky(\beta_1 - \beta)$, fällt wieder aus demselben Grunde der Theil des Integrals, der das zweite Glied enthält, fort.

Indem wir den ersten Theil integriren, ergiebt sich:

$$\Phi_0 = C . \frac{1}{k . (\alpha_1 - \alpha_0)} . \overline{\underline{\sin kx(\alpha_1 - \alpha_0)}} . \frac{1}{k(\beta_1 - \beta_0)} . \overline{\underline{\sin ky . (\beta_1 - \beta_0)}} . \cos nt \quad (225)$$

Nun wollen wir annehmen, dafs x für eine Seite der rechteckigen Oeffnung gleich $+A$ sei, für die andere gleich $-A$, so dafs also $2A$ die Breite der rechteckigen Oeffnung in der Richtung der x-Axe ist. Dann ist

$$\overline{\underline{\sin kx(\alpha_1 - \alpha_0)}} = 2 \sin kA(\alpha_1 - \alpha_0)$$

und wenn wir $2B$ als Breite der Oeffnung in Richtung der y-Axe annehmen, ganz analog:

$$\overline{\underline{\sin ky(\beta_1 - \beta_0)}} = 2 \sin kB(\beta_1 - \beta_0) .$$

Wir erhalten also

$$C \cdot \frac{2 \sin k A(\alpha_1 - \alpha_0)}{k(\alpha_1 - \alpha_0)} \cdot \frac{2 \sin k B(\beta_1 - \beta_0)}{k \cdot (\beta_1 - \beta_0)}$$

als allgemeinen Werth für die Amplitude des gebeugten Lichtes.

§ 52. Die Erscheinungen bei der Beugung kugelförmiger Wellen durch eine rechteckige Oeffnung.

Die Intensität des Lichtes würde durch das Quadrat der Amplitude darzustellen sein. Dieses wird nun gleich Null, so oft die Gröfsen, die unter dem Sinuszeichen stehen, gleich Null werden. Das sind aber Gröfsen, welche theils von der Wellenlänge, theils von der Breite der Oeffnung, theils von den Winkeln abhängen, welche die beiden Verbindungslinien von der Mitte der Oeffnung nach den Punkten $x_1\, y_1\, z_1$ und $x_0\, y_0\, z_0$ mit der Normale der Oeffnung machen. Je nach der Gröfse dieser Winkel werden die beiden Sinuswerthe bald gleich Null werden, bald einen von Null verschiedenen Werth haben. Da bei der Intensität nur das Quadrat des Werthes in Betracht kommt, so brauchen wir auf den Wechsel der Vorzeichen nicht weiter zu achten.

Diejenigen Stellen, wo Φ_0 für beliebige Werthe von t verschwindet, also Dunkelheit herrscht, werden, wie aus dem Werthe der Amplitude ersichtlich, in jeder zur Oeffnung parallelen Ebene auf geraden Linien liegen, die den Seiten der Oeffnung parallel laufen. Wir haben zwei Systeme von parallelen Geraden, in denen

$$\left.\begin{aligned} k \cdot A(\alpha_1 - \alpha_0) &= \mathfrak{a} \cdot \pi \\ \text{bez.} \quad k \cdot B(\beta_1 - \beta_0) &= \mathfrak{b} \cdot \pi \end{aligned}\right\} \quad (226)$$

ist, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ beliebige ganze Zahlen bezeichnen, und in allen Punkten dieser Geraden ist

$$\left.\begin{aligned} \sin k \cdot A(\alpha_1 - \alpha_0) &= 0 \\ \text{bez.} \quad \sin k \cdot B(\beta_1 - \beta_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (226\,\text{a})$$

also einer der beiden in dem Werthe von Φ_0 vorkommenden Factoren gleich Null; auf den Schnittpunkten sind beide Factoren gleich Null.

Ein Ausnahmefall tritt ein, wenn die Argumente selbst verschwinden, in den Gleichungen (226) also $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ gleich Null ist, d. h.

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 \\ \text{bez.} \quad \beta_1 &= \beta_0 \end{aligned}$$

Dann werden auch die im Nenner des Ausdruckes für Φ_0 vorkommenden Differenzen $\alpha_1 - \alpha_0$ bez. $\beta_1 - \beta_0$ gleich Null. Nun ist aber

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{2 \sin k A (\alpha_1 - \alpha_0)}{k(\alpha_1 - \alpha_0)}\right]_{\alpha_1 - \alpha_0 = 0} = 2\,A \\ &\text{und} \\ &\left[\frac{2 \sin k B . (\beta_1 - \beta_0)}{k(\beta_1 - \beta_0)}\right]_{\beta_1 - \beta_0 = 0} = 2\,B \end{aligned}\right\} \tag{227}$$

so dafs also für $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ und $\beta_1 - \beta_0 = 0$

$$\Phi_0 = 4\,C . A . B . \cos n\,t \tag{228}$$

wird.

Um die Gesammtheit der Erscheinungen am leichtesten übersehen zu können, müssen wir uns vergegenwärtigen, dafs $\alpha_1 - \alpha_0$ und $\beta_1 - \beta_0$ die beiden Winkel darstellen, welche durch Projection des Winkels, den ϱ_1 mit der Verlängerung von ϱ_0 bildet, auf der $x z$- bez. $y z$-Ebene entstehen. Wenn die beiden Strahlen in gerader Linie liegen, also ϱ_0 eine geradlinige Fortsetzung von ϱ_1 ist, so dafs der Mittelstrahl geradlinig durch die Oeffnung nach dem Punkte $x_0 y_0 z_0$ hingeht, dann ist $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ und $\beta_1 - \beta_0 = 0$. Wie aber die letzte Gleichung angiebt, ist die Amplitude an dieser Stelle gleich $4\,C . A . B$, also gleich der mit C multiplicirten Fläche der rechtwinkligen Oeffnung.

Wir haben oben schon gesehen, dafs Dunkelheit auf den Geraden herrscht, die in Abständen, welche den Werthen

$$k . A(\alpha_1 - \alpha_0) = \mathfrak{a} . \pi$$

und

$$k . B(\beta_1 - \beta_0) = \mathfrak{b} . \pi$$

entsprechen, den Seiten der Oeffnung parallel laufen. Die Maschen dieses bis auf die in jeder der beiden Richtungen fehlende Mittellinie regelmäfsigen rechtwinkligen Systems von dunklen Linien sind nun leuchtende Felder verschiedener Intensität.

Die Intensität des centralen Feldes haben wir soeben kennen gelernt. Wenn wir nun zunächst die Reihe der Felder verfolgen, für welche $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$ ist, so erhalten wir hier die in der Mitte eines jeden Feldes gelegene Helligkeit, die sehr nahe gleich der maximalen Helligkeit des Feldes ist, wenn wir berücksichtigen, dafs für $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$

$$\frac{2 . \sin k A . (\alpha_1 - \alpha_0)}{k . (\alpha_1 - \alpha_0)} = 2\,A$$

wird, und dafs wir hier

$$kB.(\beta_1 - \beta_0) = (2\mathfrak{b} + 1).\frac{\pi}{2}$$

zu setzen haben. Es ist dann

$$\frac{2\sin k.B(\beta_1-\beta_0)}{k(\beta_1-\beta_0)} = \frac{2}{\frac{2\mathfrak{b}+1}{2}.\pi.\frac{1}{B}} = \frac{4B}{(2\mathfrak{b}+1).\pi};$$

also ist für diese Reihe

$$\Phi_0 = \frac{8A.B}{(2\mathfrak{b}+1).\pi}.C.\cos nt \tag{229}$$

worin wir für $\mathfrak{b}$ die Reihenfolge der natürlichen Zahlen einzusetzen haben, um die den einzelnen Feldern zukommenden Werthe zu erhalten.

Analog ergiebt sich für die Reihe, in der $\beta_1 - \beta_0 = 0$ ist

$$\Phi_0 = \frac{8.A.B}{(2\mathfrak{a}+1)\pi}.C.\cos nt \tag{230}$$

Für Felder, welche weder in einer Reihe liegen, in der $\alpha_1 - \alpha_0 = 0$, noch in einer Reihe, in der $\beta_1 - \beta_0 = 0$, ist ganz allgemein die Amplitude

$$\left.\begin{aligned} C.\frac{2\sin kA(\alpha_1-\alpha_0)}{k(\alpha_1-\alpha_0)}.\frac{2\sin kB(\beta_1-\beta_0)}{k(\beta_1-\beta_0)} &= C.\frac{2}{\frac{2\mathfrak{a}+1}{2}.\pi.\frac{1}{A}}.\frac{2}{\frac{2\mathfrak{b}+1}{2}.\pi.\frac{1}{B}} \\ &= \frac{16A.B}{(2\mathfrak{a}+1).(2\mathfrak{b}+1).\pi^2}.C \end{aligned}\right\} \tag{231}$$

Die Figur 23 auf S. 181 stellt die ganze Erscheinung in schematischer Weise dar. Die horizontalen und verticalen Striche entsprechen den durch die Beugung entstehenden dunkeln Linien, und der der Mitte jeden Feldes zukommende Betrag der Amplitude ist in dasselbe eingetragen. Es entsteht also eine Reihe von rechteckigen Lichtflecken, von denen die beiden Mittelreihen die breitesten und auch die hellsten sind, während in den Seitenreihen die Intensitäten schnell abnehmen.

Das hier theoretisch Abgeleitete stimmt nun in der That völlig mit dem überein, was man wahrnimmt, wenn man durch eine sehr kleine rechteckige Oeffnung nach irgend einem kleinen leuchtenden Punkte blickt. Eine solche Oeffnung kann man sich durch Aufkleben von Stanniolblättchen auf eine Glasplatte zurecht machen. Der

leuchtende Punkt mufs aber sehr klein sein, damit man die Erscheinung deutlich sieht, weil sich sonst statt jedes Lichtpunktes ausgebreitetere Lichtflächen bilden, die dann zum Theil die dunkeln Linien überdecken und das Ganze verwaschen machen, wodurch die Intensitätsunterschiede der hellen und dunkeln Partien verschwinden. Sehr viel gröfser und deutlicher sieht man die Erscheinung, wenn man eine etwas gröfsere rechteckige Oeffnung vor das Objectivglas eines Fernrohres bringt, welches man auf den Lichtpunkt einstellt.

$\frac{16AB}{49\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{35\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{21\pi^2}.C$	$\frac{8AB}{7\pi}.C$	$\frac{16AB}{21\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{35\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{49\pi^2}.C$
$\frac{16AB}{35\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{25\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{15\pi^2}.C$	$\frac{8AB}{5\pi}.C$	$\frac{16AB}{15\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{25\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{35\pi^2}.C$
$\frac{16AB}{21\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{15\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{9\pi^2}.C$	$\frac{8AB}{3\pi}.C$	$\frac{16AB}{9\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{15\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{21\pi^2}.C$
$\frac{8AB}{7\pi}.C$	$\frac{8AB}{5\pi}.C$	$\frac{8AB}{3\pi}.C$	$4ABC$	$\frac{8AB}{3\pi}.C$	$\frac{8AB}{5\pi}.C$	$\frac{8AB}{7\pi}.C$
$\frac{16AB}{21\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{15\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{9\pi^2}.C$	$\frac{8AB}{3\pi}.C$	$\frac{16AB}{9\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{15\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{21\pi^2}.C$
$\frac{16AB}{35\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{25\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{15\pi^2}.C$	$\frac{8AB}{5\pi}.C$	$\frac{16AB}{15\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{25\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{35\pi^2}.C$
$\frac{16.AB}{49\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{35\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{21\pi^2}.C$	$\frac{8AB}{7\pi}.C$	$\frac{16AB}{21\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{35\pi^2}.C$	$\frac{16AB}{49\pi^2}.C$

Fig. 23.

Dritter Abschnitt.

Die Beugung an einem Gitter.

§. 53. Ausführung der Integration für mehrere neben einander gelegene gleiche äquidistante rechteckige Oeffnungen.

Von grofser praktischer Wichtigkeit für die Messung der Wellenlängen des Lichtes ist der Fall geworden, wo eine Reihe solcher völlig congruenter neben einander liegender äquidistanter Oeffnungen vorhanden ist.

Zur Berechnung der in diesem Falle auftretenden Erscheinungen müssen wir auf Gleichung (220 e)

$$\Phi_0 = C\left[\iint \cos\{kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0)\} \cos nt.dx.dy\right.$$
$$\left. + \iint \sin\{kx(\alpha_1 - \alpha_0) + ky(\beta_1 - \beta_0)\} \sin nt.dx.dy\right]$$

zurückgehen. Wir wollen annehmen, dafs das benutzte Coordinatensystem wieder den Seiten der rechteckigen Oeffnungen parallel sei, und zwar soll die Richtung der x-Axe mit der Richtung der parallelen Nebeneinanderlagerung der Oeffnungen übereinstimmen. Legen wir dann wieder den Anfangspunkt der Coordinaten in die Mitte der Ausdehnung nach der y-Richtung, so fallen, ähnlich wie in § 51, diejenigen Theile des Integrales fort, die den Faktor $\sin ky.(\beta_1 - \beta_0)$ enthalten, und es wird also

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0 = C\Big[&\iint \cos kx(\alpha_1 - \alpha_0) \cos ky(\beta_1 - \beta_0) \cos nt.dx.dy \\ &+ \iint \sin kx(\alpha_1 - \alpha_0) \cos ky(\beta_1 - \beta_0) \sin nt.dx.dy\Big]\end{aligned}\right\} \quad (232)$$

Wir können nun sofort die Integration nach y ausführen, und es ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0 = C\frac{1}{k(\beta_1 - \beta_0)} \overline{\sin ky(\beta_1 - \beta_0)}.\Big[&\int \cos kx(\alpha_1 - \alpha_0) \cos nt.dx \\ &+ \int \sin kx(\alpha_1 - \alpha_0) \sin nt.dx\Big]\end{aligned}\right\} \quad (232\,\text{a})$$

Ist wieder $2B$ die Ausdehnung der einzelnen Oeffnungen in der Richtung der y-Axe, so wird

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0 = C.\frac{2.\sin kB(\beta_1-\beta_0)}{k.(\beta_1-\beta_0)}.\Big[\int\cos kx(\alpha_1-\alpha_0)\cos nt.dx\\ +\int\sin kx(\alpha_1-\alpha_0)\sin nt.dx\end{aligned}\right\}\quad(232\text{b})$$

Im Folgenden wollen wir uns nun darauf beschränken, die Erscheinung für diejenigen Punkte zu berechnen, in denen $\beta_1-\beta_0=0$; dann wird, wenn wir zugleich die beiden Integrale in eines zusammenfassen,

$$\Phi_0 = C.2B\int\cos\{kx(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}dx \qquad (233)$$

oder, wenn wir

$$C' = C.2B$$

setzen

$$\Phi_0 = C'\int\cos\{kx(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}dx \qquad (233\text{a})$$

Dieses Integral ist nun über die ganze Reihe der Oeffnungen auszuführen. Wir wollen den Nullpunkt der x-Axe in die Mitte der mittleren Oeffnung legen und annehmen, dafs c der Abstand der Mitten je zweier benachbarter Oeffnungen sei. Dann unterscheiden sich die übrigen Oeffnungen von der ersten dadurch, dafs zu allen Werthen ihrer x-Coordinaten noch c, $2c$, $3c$, u. s. w. bez. $-c$, $-2c$, $-3c$ u. s. w. hinzuzufügen ist. Wenn wir daher mit $2A$ die Breite der Oeffnungen in Richtung der x-Axe bezeichnen, so kommt zu dem Integral, welches zwischen den Grenzen $+A$ und $-A$ genommen ist, noch eine Reihe von anderen Integralen hinzu, die sich auf diese Seitenöffnungen beziehen und zwischen den Grenzen $c+A$ und $c-A$, $2c+A$ und $2c-A$, u. s. w. bez. $-c+A$ und $-c-A$, $-2c+A$ und $-2c-A$ u. s. w. zu nehmen sind, so dafs wir also haben

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0 = C'\int\limits_{-A}^{+A}\cos\{kx(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}dx + C'\int\limits_{c-A}^{c+A}\cos\{kx(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}dx\\ + C'\int\limits_{-c-A}^{-c+A}\cos\{kx(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}dx+\dots\end{aligned}\right\}\quad(233\text{b})$$

Nun kann man aber setzen:

$$\left.\begin{aligned}\int_{c-A}^{c+A}\cos\{kx(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}\,dx &= \int_{-A}^{+A}\cos\{k(x+c)(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}dx\\ \int_{-c-A}^{-c+A}\cos\{kx(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}\,dx &= \int_{-A}^{+A}\cos\{k(x-c)(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}dx\\ \int_{2c-A}^{2c+A}\cos\{kx(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}\,dx &= \int_{-A}^{+A}\cos\{k(x+2c)(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}dx\end{aligned}\right\}\quad(234)$$

u. s. w. Daher lassen sich die in Gleichung (233 b) vorkommenden Integrale in eins zusammenfassen, und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0 = C'.\int_{-A}^{+A}\Big\{&\cos\{kx(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}+\cos\{k(x+c)(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}\\ &+\cos\{k(x-c)(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}+\cos\{k(x+2c)(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}+\dots\Big\}.dx\end{aligned}\right\}\quad(233\,\text{c})$$

Nun ist aber .

$$\left.\begin{aligned}\cos\{k(x-c)(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}&+\cos\{k(x+c)(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}\\ &=2\cos\{kx(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}\cos kc(\alpha_1-\alpha_0)\end{aligned}\right\}\quad(235)$$

Analoge Gleichungen bestehen, wenn c durch $2c$, $3c$, $4c$, $5c$ u. s. w. ersetzt ist. Wir können daher unseren Ausdruck für Φ_0 in eine Summe umformen, in der die Gröfse c nach einander die sämmtlichen Werthe ihrer Multipla annimmt, soweit die Reihe der Oeffnungen sich erstreckt. Nehmen wir an, es seien aufser der mittleren Oeffnung, von der wir ausgehen und in deren Mitte der Anfangspunkt der Coordinaten liegt, auf jeder Seite n Oeffnungen vorhanden, so lassen sich immer je zwei, welche gleiche Entfernung von der Mitte haben, in analoger Weise zusammenfassen, wie wir in Gleichung (235) die auf die beiden nächst liegenden bezüglichen Glieder zusammengegriffen haben. Der Factor $\cos\{kx(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}$ bleibt in allen diesen Gliedern stehen, und wir können ihn daher herausziehen, wenn wir die Summation vornehmen. Es ergiebt sich dann:

$$\Phi_0 = C'\int_{-A}^{+A}\cos\{kx(\alpha_1-\alpha_0)-nt\}.\left[1+2\sum_{\mathfrak{a}=1}^{\mathfrak{a}=n}\cos k.\mathfrak{a}.c(\alpha_1-\alpha_0)\right]dx \quad (233\,\text{d})$$

worin $\mathfrak{a}$ die durchlaufende Reihe der ganzen Zahlen von 1 bis n

bezeichnet. Statt des Cosinus können wir nun imaginäre Potenzen einführen und

$$2\cos k\,a\,c(\alpha_1 - \alpha_0) = e^{i k a c(\alpha_1 - \alpha_0)} + e^{-i k a c(\alpha_1 - \alpha_0)}$$

setzen. Wir bekommen dann zwei Summen, deren Summanden nach den Potenzen von $e^{ikc(\alpha_1 - \alpha_0)}$ bez. $e^{-ikc(\alpha_1 - \alpha_0)}$ fortschreiten. Wenn wir nun berücksichtigen, dafs

$$\sum_{a=0}^{a=n} x^a = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

ist, so ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0 = C'.\int_{-A}^{+A} \cos\{kx(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\}.\Bigg[\frac{1 - e^{ikc(\alpha_1 - \alpha_0)(n+1)}}{1 - e^{ikc(\alpha_1 - \alpha_0)}} \\ + \frac{1 - e^{-ikc(\alpha_1 - \alpha_0)(n+1)}}{1 - e^{-ikc(\alpha_1 - \alpha_0)}} - 1\Bigg] dx\end{aligned}\right\} \quad (233\text{e})$$

Dadurch ist unsere Reihe in einen geschlossenen Ausdruck umgeformt. Bringt man die beiden Brüche auf gleichen Nenner, formt die Exponentialfunctionen wieder in trigonometrische Functionen um und setzt zur Vereinfachung der Schreibweise

$$c.(\alpha_1 - \alpha_0) = z \quad (236)$$

so erhalten wir:

$$\Phi_0 = C'.\int_{-A}^{+A} \cos\{kx(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\}.\left\{\frac{2 - 2\cos kz - 2\cos(n+1)kz + 2\cos knz}{2 - 2\cos kz} - 1\right\} dx$$

$$= C'.\int_{-A}^{+A} \cos\{kx(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\}.\left\{\frac{-\cos(n+1)kz + \cos knz}{1 - \cos kz}\right\} dx \quad (233\text{f})$$

Nun ist:

$$\cos knz - \cos(n+1)kz = 2\sin(n + \tfrac{1}{2})kz \,.\, \sin\tfrac{1}{2}kz$$

und

$$1 - \cos kz = 2\sin^2\tfrac{1}{2}kz;$$

mithin

$$\Phi_0 = C'.\int_{-A}^{+A} \cos\{kx(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\}\cdot\frac{2\sin(n+\frac{1}{2})kz \,.\, \sin\frac{1}{2}kz}{2\,.\sin^2\frac{1}{2}kz} dx$$

$$= C'.\int_{-A}^{+A} \cos\{kx(\alpha_1 - \alpha_0) - nt\}\cdot\frac{\sin(n+\frac{1}{2})kz}{\sin\frac{1}{2}kz} dx \quad (233\text{g})$$

Indem wir nun den Cosinus zerlegen und nach x integriren, die Grenzen einführen und für z aus Gleichung (236) seinen Werth schreiben, erhalten wir:

$$\Phi_0 = C' \cdot \frac{2 \sin k A (\alpha_1 - \alpha_0)}{k(\alpha_1 - \alpha_0)} \cdot \frac{\sin (n + \frac{1}{2}) . k . c . (\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin \frac{1}{2} k c (\alpha_1 - \alpha_0)} \cos n t, \quad (233\text{h})$$

so dafs also der Ausdruck

$$C' \cdot \frac{2 \sin k A (\alpha_1 - \alpha_0)}{k(\alpha_1 - \alpha_0)} \cdot \frac{\sin (n + \frac{1}{2}) k . c (\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin \frac{1}{2} k c (\alpha_1 - \alpha_0)}$$

die Amplitude der Schwingungen in dem für die Sammlung der Strahlen gewählten Punkte darstellt.

§ 54. Die Lage und Anordnung der Helligkeitsmaxima und -minima.

Der im vorigen Paragraphen abgeleitete Werth für die Amplitude der durch das Gitter austretenden Strahlen enthält einen Factor $\frac{\sin [k A (\alpha_1 - \alpha_0)]}{k(\alpha_1 - \alpha_0)}$, welcher auch in dem Werthe der Amplitude bei der Beugung an einer einzelnen Oeffnung vorkam (Gleichung 225 a). Er bedingt in unserem Werthe also dieselbe Ausdehnung und Vertheilung der Helligkeit. Wir werden daher die gleichen dunkeln Striche haben, welche eine einzelne Oeffnung geben würde. Bei den gewöhnlich benutzten Gittern sind nun aber die einzelnen Oeffnungen aufserordentlich fein, und es ist daher der mittlere helle Streifen nach der Seite, d. h. in der Richtung der x-Coordinaten, sehr weit ausgebreitet. Man findet zwar bei genauer Betrachtung manchmal noch weitere seitwärts gelegene Minima und Maxima, aber gewöhnlich wird die ganze Erscheinung von dem ersten durch diesen Factor bedingten Minimum in ziemlich grofser Entfernung von der Mitte begrenzt.

Die Intensitätsvertheilung in dem hellen Streifen ist nun aber thatsächlich doch nicht dieselbe, wie bei einer einzelnen Oeffnung. Denn es tritt durch die Wiederholung der Oeffnungen in dem Ausdrucke der Amplitude noch ein zweiter Factor, $\frac{\sin (n + \frac{1}{2}) k c (\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin \frac{1}{2} k c (\alpha_1 - \alpha_0)}$, hinzu. Der im Zähler stehende Sinus wird Null werden, so oft

$$(n + \tfrac{1}{2}) . k . c . (\alpha_1 - \alpha_0) = \mathfrak{a} . \pi \quad (237)$$

wird, wo $\mathfrak{a}$ eine beliebige ganze Zahl bezeichnet. Wir werden also wiederum eine Reihe von äquidistanten dunkeln Linien haben; aber da

hier $(\alpha_1 - \alpha_0)$ multiplicirt ist mit $(n + \frac{1}{2}).c$, d. h. der halben Breite des ganzen Gitters, so stehen diese dunkelen Linien sehr viel näher an einander, weil bei dem gröfseren Factor durch Zunahme des Winkels $(\alpha_1 - \alpha_0)$ der Werth π schneller immer wieder erreicht wird. Die zwischen diesen Stellen völliger Dunkelheit liegenden Maxima werden, da der Zähler sich viel rascher ändert als der Nenner, wenn dieser nicht verschwindet, nahezu da erreicht, wo der Zähler sein Maximum hat, also für:

$$\sin(n + \tfrac{1}{2}).k.c.(\alpha_1 - \alpha_0) = 1,$$

und es ist für sie daher:

$$\Phi_0 = C' \cdot \frac{2.\sin k.A(\alpha_1 - \alpha_0)}{k.(\alpha_1 - \alpha_0)} \cdot \frac{1}{\sin\frac{1}{2}k.c(\alpha_1 - \alpha_0)} \cos n t. \tag{238}$$

Bei zahlreichen Oeffnungen sind nun diese Maxima, verglichen mit den sogleich zu betrachtenden Hauptstellen gröfster Helligkeit, so schwach und undeutlich, dafs man sie gar nicht zu sehen bekommt, wenn man ihnen nicht besondere Aufmerksamkeit schenkt und sorgfältig gereinigtes monochromatisches Licht benutzt.

Eine Ausnahme in der regelmäfsigen Folge der zwischen diesen schwachen und undeutlichen Maxima gelegenen Minima tritt für diejenigen Stellen ein, wo nicht nur

$$\left.\begin{aligned} &\sin(n + \tfrac{1}{2})kc(\alpha_1 - \alpha_0) = 0, \\ \text{sondern zugleich}\quad &\sin\tfrac{1}{2}kc(\alpha_1 - \alpha_0) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{239}$$

ist. Dieses ist zunächst der Fall, wenn $\alpha_1 = \alpha_0$ ist, d. h. wenn wir den gerade hindurch gehenden Strahl ins Auge fassen. Es ist dann

$$\left(\frac{\sin(n + \frac{1}{2})k.c.(\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin\frac{1}{2}k.c.(\alpha_1 - \alpha_0)}\right)_{\alpha_1 = \alpha_0} = 2n + 1. \tag{240}$$

Weitere derartige Ausnahmestellen liegen dort, wo

$$\left.\begin{aligned} &(n + \tfrac{1}{2}).k.c.(\alpha_1 - \alpha_0) = \mathfrak{a}.\pi \\ \text{und zugleich}\quad &\tfrac{1}{2}k.c.(\alpha_1 - \alpha_0) = \mathfrak{b}.\pi \end{aligned}\right\} \tag{241}$$

ist, wenn wir mit $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei ganze Zahlen bezeichnen. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich aber

$$\mathfrak{b} = \frac{\mathfrak{a}}{2n + 1}. \tag{241 a}$$

Wächst also die Winkeldifferenz $\alpha_1 - \alpha_0$ stets, so wird $\sin(n + \frac{1}{2})kc(\alpha_1 - \alpha_0)$ $2n$ mal, d. h. so oft, als die um 1 verminderte Zahl der Oeffnungen

in dem Gitter beträgt, den Werth Null erlangen, bevor da, wo in regelmäfsiger Folge das $(2n + 1)$te Minimum liegen müfste, eine der Ausnahmestellen eintritt, an denen die Sinuswerthe im Zähler und Nenner zugleich verschwinden.

Der Werth des Factors

$$\frac{\sin (n + \frac{1}{2}) k c . (\alpha_1 - \alpha_0)}{\sin \frac{1}{2} k . c . (\alpha_1 - \alpha_0)}$$

ist in diesen Ausnahmestellen ebenso grofs, wie er (Gleichung 240) für $\alpha_1 = \alpha_0$ ist, d. h. gleich $2n + 1$, gleich der Anzahl von Oeffnungen, welche in dem ganzen Gitter enthalten sind, und daher ist für alle diese Ausnahmestellen

$$\Phi_0 = C . (2n + 1) . \frac{2 \sin k A (\alpha_1 - \alpha_0)}{k (\alpha_1 - \alpha_0)} \cos n t. \tag{242}$$

Die Amplitude nimmt in Folge ihres letzten Factors nach der Seite hin ab, ist aber stets beträchtlich gröfser, als die in der Gleichung (238) dargestellte Amplitude der zahlreichen übrigen Maxima.

Die Erscheinung ist nun in der That auch eine solche, dafs man in der Mitte ein helles Lichtbild wahrnimmt, neben dem dann in bestimmten Entfernungen Nebenbilder erscheinen, welche allmählich an Helligkeit abnehmen. Dazwischen ist bei den Gittern, welche zahlreiche Oeffnungen enthalten, ein Schein ausgebreitet, der durch sehr schwache undeutliche, abwechselnd helle und dunkle Linien gebildet wird. Sind die Oeffnungen weniger zahlreich, so löst sich der Lichtschein in die einzelnen von der Theorie geforderten Linien auf.

Man kann nun auch für alle beliebigen Formen von Oeffnungen, für kreisförmige, elliptische, dreieckige Gruppen u. s. f., oder Gruppen von Dreiecken, welche pyramidenförmig über einander gestellt sind u. s. f., diese Integrationen ausführen, wie wir es hier nur für eine einzige Reihe rechteckiger Oeffnungen gethan haben. Es kommen dabei nur Quadraturen vor, wenigstens, wenn man bei der ersten Annäherung stehen bleibt und sich mit der Annahme begnügt, dafs der leuchtende Punkt und der Sammelpunkt, in welchem man die Erscheinung beobachten will, beide von dem Gitter so weit entfernt liegen, dafs die Dimensionen des Gitters selbst sehr klein sind gegen die Länge der Strahlen.

Es läfst sich noch in anderer Weise eine kürzere anschaulichere Bedingung für die Lage der hellen und dunkeln Linien ableiten, wozu wir nun übergehen wollen. Dabei wird sich auch ergeben,

welche Aenderungen in allen diesen Erscheinungen eintreten, wenn entweder die Wellenlängen sehr grofs sind im Vergleich zu der Gröfse der beugenden Oeffnungen, oder wenn das Umgekehrte der Fall. Die letztere Betrachtung führt uns dann zu der Beantwortung der Frage, wann wir berechtigter Weise von einer Fortpflanzung des Lichtes in geradlinigen Strahlen sprechen können. Es wird sich zeigen, dafs dieses als Grenzfall eintritt, wenn die Wellenlängen unendlich klein sind sowohl im Vergleich zu der Gröfse der Oeffnung als auch im Vergleich mit der Weglänge, durch welche das Licht sich fortpflanzt.

Vierter Abschnitt.

Die Beugungserscheinungen als Folge interferirender Wellensysteme anschaulich abgeleitet.

---

§ 55. Die Erscheinungen bei einer einzelnen spaltförmigen Oeffnung.

Die bisher mathematisch berechneten Erscheinungen lassen sich noch in einer anderen, mehr anschaulichen Weise betrachten und als Folge der nach dem Huyghens'schen Princip stattfindenden Superposition der Wellen ableiten. Wir haben hierbei jeden einzelnen Punkt der Oeffnung oder der verschiedenen Oeffnungen in Folge der in ihm vom ursprünglichen Erregungspunkt anlangenden Wellen als neuen Erregungspunkt für ein Wellensystem aufzufassen, welches sich dann auf der anderen Seite des Schirmes ausbreitet. Durch Interferenz dieser Wellensysteme entstehen die Beugungserscheinungen.

Der Einfachheit halber wollen wir annehmen, dafs der Erregungs- und der Sammelpunkt der betrachteten Wellen soweit von dem beugenden Schirm abliegen, dafs wir alle Strahlen als parallel ansehen können, d. h. also, dafs im Vergleich zu dem Abstand von den beugenden Oeffnungen die Ausdehnung der letzteren verschwindend klein ist.

Fallen die Strahlen senkrecht auf den Schirm, so haben sie alle in der Ebene der beugenden Oeffnung dieselbe Phase, und eine Differenz der Weglänge zwischen den verschiedenen Strahlen besteht nur in dem zweiten Medium, d. h. hinter dem Schirm.

In Fig. 24 sei *ab* eine Oeffnung in dem Schirm, *a′abb′* das senkrecht einfallende Strahlenbündel und *aa″b″b* ein beliebiges auslaufendes Strahlenbündel, welches sich in einem unendlich weit entfernten Punkte vereinigt. Das Loth *bc*, welches von dem einen Rande *b* der Oeffnung auf den Grenzstrahl gefällt ist, der durch den Rand *a* hindurch geht, möge ein Stück *ac* abschneiden, welches einer halben Wellenlänge gleich ist. Es sind also gerade die entgegengesetzten Phasen eingetreten, und diese Wellen vernichten den Einfluſs der Strahlen, welche durch den anderen Rand gegangen sind. Bis zu dieser Weglängendifferenz haben sich noch alle Strahlen verstärkt; wird sie gröſser, so fangen die Strahlen an, sich gegenseitig zu vernichten. Haben wir den Unterschied einer ganzen Wellenlänge, d. h. ist *ac* gleich einer ganzen Wellenlänge, dann besteht in der Mitte ein Unterschied von einer halben Wellenlänge, und es findet jeder Strahl, der in der ersten Hälfte der Oeffnung

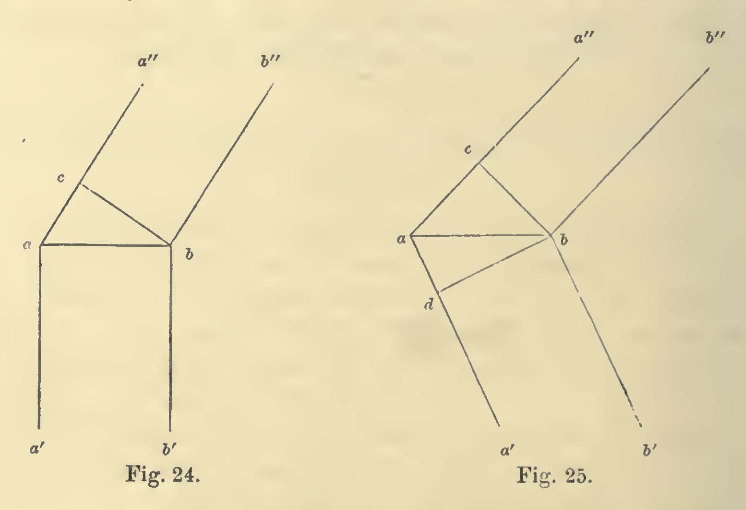


Fig. 24. Fig. 25.

liegt, in der anderen Hälfte der Oeffnung einen anderen, durch den er vernichtet wird, und es wird also völlige Dunkelheit in der Richtung, welche dem so geneigten Bündel entspricht, eintreten.

Ist die Strecke *ac* gleich drei halben Wellenlängen, so können wir uns die Fläche der Oeffnung in drei Theile getheilt denken, von denen die Strahlen des ersten Theiles gerade aufgehoben werden durch die Strahlen des zweiten Theiles, welche entgegengesetzte Phasen besitzen. Es bleiben dann nur die Strahlen des dritten Theiles übrig, die sich gegenseitig verstärken. Aus dieser Betrachtung folgt also auch, daſs die Gesammtamplitude der Lichtbewegung, welche in dieser Richtung bestehen bleibt, nur ein Drittel von der-

jenigen betragen wird, welche bei einem Unterschied der Weglängen von nur einer halben Wellenlänge besteht. Es können also in seitlicher Richtung überall da schwächere Maxima entstehen, wo eine ungerade Zahl von halben Wellenlängen in die Strecke *ac* hinein geht.

In den allgemeineren Fällen, wo beide Strahlenbündel, sowohl das einfallende wie das auslaufende, schräg gegen die Ebene der Oeffnung gerichtet sind, werden wir dieselbe Construction auf beiden Seiten der Oeffnung zu wiederholen haben, wie dieses in Fig. 25 ausgeführt ist. Es sind dann die beiden Strecken *ac* und *ad* zusammengenommen gleich der Differenz der Weglänge, und das Zustandekommen der Maxima und Minima ist dann dadurch bedingt, dafs die Summe dieser beiden Strecken $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{2}$ oder $\frac{5}{2}$ u. s. w. Wellenlängen beträgt.

Aus dieser ganzen Betrachtung geht hervor, dafs sowohl die Gröfse der Oeffnung als auch die Gröfse der Wellenlänge von Einflufs auf die Lage der verschiedenen Maxima und Minima der gebeugten Strahlen ist. Bei derselben Oeffnung werden kürzere Wellenlängen dichter neben einanderliegende Maxima haben, weil für sie die Zunahme von *ac* (Fig. 24) bez. $ac + ad$ (Fig. 25) um eine gleiche Anzahl von Wellenlängen eine geringere Aenderung der Richtung erfordert, als für gröfsere Wellenlängen. Andererseits mufs für dieselbe Wellenlänge bei einer kleineren Oeffnung eine stärkere Ablenkung des gebeugten Lichtes vorhanden sein, ehe die für die Maxima erforderlichen Wegdifferenzen eintreten. Maxima und Minima liegen also um so dichter an einander, je kleiner die Wellenlänge und je gröfser die Oeffnung ist. Wenn man nicht homogenes, sondern weifses Licht benutzt, so entstehen farbige Interferenzerscheinungen, weil die Maxima und Minima bei derselben Oeffnung für die verschiedenen Wellenlängen nicht auf die gleiche Stelle fallen.

§ 56. Die Erscheinungen bei einem Gitter.

Wir wollen nun annehmen, dafs mehrere gleich grofse spaltförmige Oeffnungen in gleichen Abständen vorhanden sind, und dafs die einzelnen Oeffnungen selbst sehr schmal sind. Dann wird jede von ihnen weit auseinanderliegende Maxima und Minima ergeben, so dafs bereits das mittlere Maximum allein ein weit ausgebreitetes Lichtfeld bildet. Die Maxima und Minima der verschiedenen Oeffnungen decken sich, weil wir die Gröfse des ganzen Gitters als klein gegenüber den sonstigen Entfernungen voraussetzen. Innerhalb jedes

einzelnen dieser Lichtfelder, von denen wir aber nur das mittlere näher berücksichtigen wollen, können nun die aus den verschiedenen Oeffnungen heraustretenden Strahlenbündel mit einander interferiren und dadurch in ihm wieder neue Maxima und Minima der Helligkeit erzeugen.

Fallen die Strahlen senkrecht auf das Gitter auf, so entsteht der ganze Wegunterschied bei der weiteren Fortpflanzung in dem zweiten Medium. Wenn wir nun von einem Punkte b der zweiten Oeffnung (Fig. 26) ein Loth mb auf einen Strahl fällen, welcher durch den entsprechenden Punkt a der ersten Oeffnung gegangen

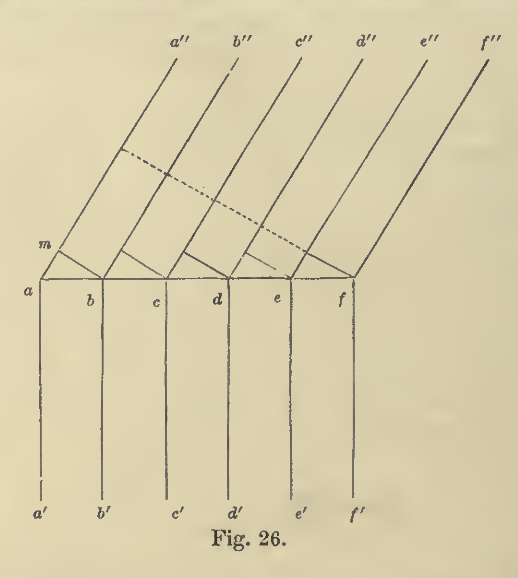


Fig. 26.

ist, und wir hierbei von ihm eine einer ganzen Wellenlänge gleiche Strecke am abtrennen, so wird der zweite Strahl dieselbe Phase wie der erste haben, und die Wirkungen werden sich addiren. Aber auch der dritte Strahl wird dann dieselbe Phase besitzen, und ebenso jeder folgende, so daſs sämmtliche Strahlen sich gegenseitig verstärken.

Es ist nun sofort ersichtlich, daſs bei allen Wegdifferenzen, die einer ganzen Zahl von Wellenlängen gleich sind, die Strahlen einander verstärken. Man erhält also in ungefähr gleichen Abständen zu beiden Seiten der ungebeugt durchgehenden Strahlen eine Reihe von Maxima der Helligkeit. Dieses sind die hellen Linien, welche man wahrnimmt, wenn man durch ein fein geritztes Gitter nach einer hellen Lichtlinie hinsieht, die monochromatisches Licht aussendet. Ist das Licht vielfarbig, so sind die Wellenlängen für die

rothen Farben gröfser als für die blauen, und es wird dann jedes solche Nebenbild in ein Spectrum ausgezogen.

Diese Helligkeitsmaxima sind aufserordentlich schmale und feine Linien, weil unmittelbar neben ihnen Stellen gröfster Dunkelheit liegen.

Diese dunklen Linien kommen in folgender Weise zu Stande: Denken wir uns, dafs nicht zwischen den Strahlen zweier benachbarten Oeffnungen, sondern der beiden äufsersten an den Rändern des Gitters gelegenen Oeffnungen ein Wegunterschied einer ganzen Wellenlänge besteht, so wird in der Mitte des Gitters ein Strahl vorkommen, der um eine halbe Wellenlänge von dem einen der beiden Strahlen differirt, und für jeden Strahl in der einen Hälfte des Gitters werden wir in der zweiten Hälfte einen anderen haben, der von ihm sich um eine halbe Wellenlänge unterscheidet, also seine Wirkung aufhebt. Dasselbe wird der Fall sein, wenn die Wegdifferenz zwischen den beiden Rändern des Gitters zwei, drei u. s. w. Wellenlängen beträgt. Es treten in diesen Richtungen also immer dunkle Linien auf. Ausnahmen bilden aber diejenigen Richtungen, in denen diese Wegdifferenz oder ein aliquoter Theil derselben soviel ganzen Wellenlängen gleich ist, als die um 1 verminderte Zahl der Oeffnungen des Gitters beträgt. Es sind dieses die Richtungen, welche wir soeben bereits eingehend besprochen haben und in denen wir das Zustandekommen von Helligkeitsmaxima nachwiesen. In ihnen ist eben die Wegdifferenz für zwei benachbarte Oeffnungen gleich einer Wellenlänge oder gleich einem ganzen Vielfachen einer Wellenlänge. Aendert sich die Richtung aber so, dafs die Differenz der Weglänge der durch die beiden äufsersten Oeffnungen laufenden Strahlen sich um eine Wellenlänge ändert, so haben wir Stellen völliger Dunkelheit. Diese Richtungsänderung ist nun bei Gittern mit grofser Oeffnungszahl ungemein gering, und daher sind jene Helligkeitsmaxima sehr schmale scharf begrenzte Streifen.

Die bisher besprochenen Helligkeitsmaxima liegen also da, wo in regelmäfsiger Folge Stellen völliger Dunkelheit liegen müfsten. Viel kleinere Maxima liegen zwischen je zwei jener zahlreichen dunklen Linien. Sie kommen da zu Stande, wo die Wegdifferenz zwischen den beiden Rändern des Gitters eine ungerade Anzahl von halben Wellenlängen beträgt. Sind es etwa drei halbe Wellenlängen, so können wir uns die Breite des Gitters in drei gleiche Theile eingetheilt denken. Dann hebt der erste Theil den zweiten in seiner Wirkung auf, weil jede Oeffnung in dem ersten Theile dann eine andere in dem zweiten Theile findet, welche um eine

halbe Wellenlänge verschieden ist, und nur ein Drittel der Oeffnungen verstärkt sich gegenseitig, so dafs relativ schwache Wirkungen in diesen Maxima zu Stande kommen. Sie sind dazu noch durch aufserordentlich eng an einander liegende Minima von einander getrennt, so dafs sie meistentheils, wie wir in § 54 schon sahen, in Form eines mäfsigen Lichtnebels zur Erscheinung kommen, der zwischen den hellen Streifen liegt, die den Hauptmaxima entsprechen, welche auf diesem hellen Nebelstreifen sich sehr deutlich und stark abheben.

§ 57. Beugung an einer Oeffnung, deren Durchmesser kleiner ist, als eine halbe Wellenlänge.

Wie wir im Bisherigen sahen, hängen die eigenthümlichen Diffractionserscheinungen wesentlich davon ab, dafs beim Zusammenwirken des Lichtes, welches von verschiedenen Theilen einer Oeffnung herkommt, im Allgemeinen diejenigen Strahlen, welche durch verschiedene Punkte der Oeffnung hindurchgegangen sind, Wegunterschiede darbieten, und sich dadurch beim Zusammentreffen bald verstärken, bald schwächen. Wenn wir z. B. eine Oeffnung ab (Fig. 27) haben, an der das Lichtbündel $a'abb'$ senkrecht auffallend anlangt, und in einiger Entfernung irgend einen Punkt P, in dem sich die Strahlen sammeln, die nun von den verschiedenen Theilen der Oeffnung ausgehen, so haben diese verschiedene Wege zurückgelegt. Denken wir uns um den Punkt P als Mittelpunkt Kugeln construirt, so werden solche Kugeln, deren Radien Unterschiede von je einer halben Wellenlänge haben, aus der Fläche der Oeffnung Streifen heraus schneiden, deren Punkte Wellen aussenden, die sich, im Punkte P angelangt, um halbe Schwingungen in ihrer Phase unterscheiden, so dafs mindestens ein Theil der Wirkung des ersten Streifens durch diejenige des zweiten aufgehoben wird, und ein Theil der Wirkung des dritten aufgehoben wird von dem vierten, u. s. f. Deshalb sind die nach der Seite hingehenden Wirkungen verhältnifsmäfsig klein.

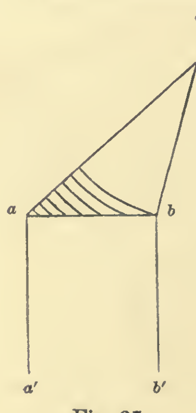


Fig. 27.

Andererseits zeigen diese Betrachtungen auch, wie es sich für verschieden lange Wellen verhalten wird. Wenn wir eine sehr enge

Oeffnung haben, wir wollen einmal annehmen, eine Oeffnung, welche kleiner als eine halbe Wellenlänge in ihrem Durchmesser sei, so wird es nicht möglich sein, von den verschiedenen Punkten derselben nach irgend einem seitlich liegenden Punkte Linien zu ziehen, welche sich um mehr als eine halbe Wellenlänge unterscheiden. Denn das von dem einen Rande der Oeffnung auf einen Strahl, der am anderen Rande vorbei geht, gefällte Loth, schneidet von dem Strahl ein Stück ab, welches jedenfalls kleiner ist, als die Breite der Oeffnung, also kleiner als eine halbe Wellenlänge. Die Strahlen müssen sich also alle gegenseitig verstärken, auch diejenigen, welche weit nach der Seite hin fallen. Daraus folgt, dafs wir durch Oeffnungen, welche geringeren Durchmesser haben als eine halbe Wellenlänge, nach allen Richtungen Licht sehen werden, wenn auch nur in einer Richtung Licht auffällt. Ein Wellenzug, der durch eine solche Oeffnung hindurchgegangen ist, wird sich also jenseits dieser Oeffnung nach allen Richtungen verbreiten. Die Stärke der seitlich ausgebreiteten Bewegung ist schwächer, als die der geradlinig fortgepflanzten, weil für sie erstens die perspectivische Gröfse der Oeffnung und der Querschnitt der Strahlenbündel, die in dieser Richtung gehen können, kleiner wird, und zweitens gröfsere Wegunterschiede vorkommen, wodurch die gegenseitigen Verstärkungen nicht so grofs sein werden als für die mittleren Richtungen.

Wenn also ein Strahlenbündel durch eine Oeffnung, welche enger ist als eine halbe Wellenlänge, hindurchgeht, so wird sich jenseits der Oeffnung gar kein Strahl mehr ausbilden, sondern die Wellenbewegung wird sich nach allen Seiten hin verbreiten, ungefähr, wie bei einer Kugelwelle, die von einem einzelnen Lichtpunkte ausgeht. Beim Schall kommt dieses Phänomen sehr häufig vor, denn es sind in vielen Fällen die Oeffnungen, durch welche der Schall hindurchgeht, kleiner, als die Hälfte der Wellenlängen. Bei den tieferen Tönen, an den unteren Grenzen der musikalischen Scala, haben wir Wellen, welche bis zu 32 Fufs lang sind. Ihnen gegenüber sind unsere Fensteröffnungen immer noch klein, und daher erklärt es sich, dafs namentlich tiefe Töne jenseits von einem geöffneten Fenster nach allen Richtungen gleich gut gehört werden. Wenn wir also durch eine sehr enge Oeffnung nach einem feinen hellen Lichtpunkt hinblicken und einen breiten Lichtschein sehen, so ist das derjenige Ausnahmefall, wo die Bewegung des Lichtes sich der Art anschliefst, wie sich die Bewegung des Schalles auszubreiten pflegt. Das Entgegengesetzte tritt ein, wenn die Wellenlänge, verglichen mit der Weglänge und der Breite der Oeffnung

aufserordentlich klein ist. Das ist der beim Lichte am meisten vorkommende Fall; bei ihm läfst sich in der That zeigen, dafs dann eine ausschliefslich geradlinige Ausbreitung der Strahlen stattfindet.

Fünfter Abschnitt.

Durchgang der Lichtbewegung durch eine Oeffnung von beliebiger Form unter der Annahme unendlich kleiner Wellenlänge.

---

§ 58. Anknüpfung an frühere Ergebnisse.

Nachdem wir bisher einzelne Beispiele der Diffraction an engen Oeffnungen behandelt haben, wollen wir nun allgemein die durch irgend eine beliebige Oeffnung fortschreitende Bewegung der Lichtwellen untersuchen, namentlich für den am häufigsten vorkommenden Fall, dafs die Wellenlängen sehr klein sind sowohl im Vergleich zu der Gröfse der Oeffnungen, durch welche das Licht hindurchgeht, als auch im Vergleich zu den vom Lichte zurückgelegten Entfernungen.

Wir haben früher gefunden, dafs

$$\psi = \frac{\cos(k\,r)}{r} \tag{243}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta\psi + k^2\psi = 0 \tag{244}$$

darstellt, welche in dem Punkte $r = 0$ eine Ungültigkeitsstelle hat.

Früher (§ 44) haben wir den Green'schen Satz auf Functionen dieser Art, d. h. auf Functionen, welche Lösungen dieser Differentialgleichungen sind, angewendet. Wenn wir mit φ eine zweite Function bezeichnen, die der Gleichung (244) genügt, so ergab sich damals (Gleichung 206 b)

$$4\pi\varphi_0 = \int\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial N} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)d\omega \tag{245}$$

wo φ_0 den Werth von φ in einem Punkte $r = 0$ bedeutet und wo das Integral der rechten Seite über irgend eine den Punkt 0 einschliefsende Fläche zu erstrecken ist.

§ 59. Anwendung auf einen Raum, der durch einen absolut schwarzen Schirm mit einer beliebigen Oeffnung in zwei Hälften getheilt ist.

Wir nehmen nun an, dafs der ganze Raum durch eine dunkle Scheidewand, welche eine beliebig gestaltete Oeffnung enthält, getheilt sei; diese dunkle Scheidewand habe die Eigenschaft, dafs sie von allen Lichtbewegungen, die ihre Oberfläche treffen, weder etwas durchläfst noch reflectirt. Streng genommen trifft diese Annahme bei keinem thatsächlich vorhandenen Körper zu; aber wir kennen doch eine Menge tiefschwarzer Körper, welche sich dieser Annahme sehr nähern.

Wir wollen nun die Lichtbewegung untersuchen, welche in dem Punkte 0 sich sammelt, nachdem sie, von dem Punkte 1 ausgehend, durch die Oeffnung mn in dem absolut schwarzen, nach den Seiten hin beliebig weit ausgedehnten Schirm hindurchgegangen ist (Fig. 28). Dann würde also eine geschlossene Fläche, welche den Raum S vollständig umgiebt, bestehen können 1) aus den beliebig weit entfernten bis an den Schirm reichenden Grenzen, 2) dem schwarzen Schirm, und 3) einer beliebigen, die Oeffnung mn schliefsenden Fläche, welche in der Figur durch die feine ausgezogene Linie angedeutet ist. Um den Werth von φ_0, also den Werth von φ im Punkte 0 zu finden, müssen wir das Integral der Gleichung (245) über diese ganze Fläche ausdehnen. Der Theil des Integrals, der sich auf die weit entfernten Grenzen bezieht, kann gleich Null gesetzt werden, indem wir annehmen, dafs hierhin noch keine Lichtbewegung gelangt ist, φ und $\frac{\partial \varphi}{\partial N}$ also verschwinden. Ebenfalls ist derjenige Theil, welcher sich auf die Oberfläche des schwarzen Schirmes bezieht, gleich Null, weil hier die ganze Lichtbewegung vernichtet wird, so dafs also nur die Fläche zur Berücksichtigung übrig bleibt, welche die Oeffnung schliefst. Es ist nun zunächst zu untersuchen, ob der Werth des Integrales von der Führung dieser Fläche unabhängig ist. Zu dem Zwecke legen wir durch die Oeffnung eine zweite, in Fig. 28 durch die punktirte Linie angedeutete Fläche, so dafs also jetzt die beiden in der Oeffnung liegenden

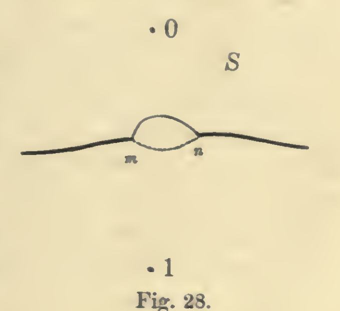


Fig. 28.

Flächen einen geschlossenen endlichen Raum völlig begrenzen. Das Integral über die gesammte Oberfläche dieses Raumes hat nun, wie wir oben gesehen haben, für den Punkt 0, der hier ein äufserer ist, den Werth Null, wobei aber die Normalen sämmtlich in das Innere dieses Raumes hinein zu nehmen sind, so dafs sie also für die eine unserer beiden die Oeffnung schliefsenden Flächen auf den Punkt 0 zugerichtet, für die andere aber von ihm abgewandt sind. Da das gesammte Integral gleich Null ist, so ist also das Integral über die eine Fläche gleich dem negativ genommenen Integral über die andere Fläche, d. h. gleich dem Integral über die andere Fläche, wenn die Normalen hier umgekehrt werden, also ebenfalls dem Punkte 0 zugewandt sind. Es ergiebt sich daraus die wichtige Folgerung für die Theorie der Diffraction, dafs es einerlei ist, wie wir die Fläche ziehen, durch welche wir uns die Oeffnung in dem dunklen Schirm verschlossen denken. Jede Fläche, welche die beiden Theile des Raumes vollständig von einander trennt, mufs denselben Werth des Integrales geben, und es folgt daraus, dafs die Werthe der Function φ in dem jenseits liegenden Raume nur von der Form der Grenzlinie der Oeffnung abhängen.

Physikalisch erscheint das selbstverständlich; denn eine solche Grenzfläche würde ja immer nur eine gedachte sein; aber dafs unsere mathematischen Ausdrücke wirklich dieser Bedingung Genüge leisten, und dafs unsere Analyse in dieser Weise zu einem richtigen Resultate führt, mufste erst nachgewiesen werden. Es bleibt nur als Bedingung bestehen, dafs die Grenzfläche in der Weise gewählt sein mufs, dafs sie die Oeffnung des Schirmes vollständig schliefst.

§ 60. Annahme bestimmter Functionen für die Wellenpotentiale.

Wir wollen nun für unsere Functionen φ und ψ bestimmte Annahmen machen, und zwar wollen wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} \psi &= \frac{\cos(k r_0)}{r_0} \\ \text{und}\qquad \varphi &= \frac{\cos(k r_1 - n t)}{r_1} \end{aligned}\right\} \qquad (247)$$

wo r_0 die Entfernung vom Sammelpunkte 0 der Strahlen, d. h. also von dem Punkte, für den wir die Lichtbewegung finden wollen, und

r_1 die Entfernung von dem Ausgangspunkte 1 der Strahlen bezeichnet.

Dadurch formt sich unsere Gleichung (245) um in:

$$4\pi . \varphi_0 = \int \left[\frac{\cos(k r_1 - n t)}{r_1} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} \cdot \frac{\partial}{\partial r_0} \left(\frac{\cos k r_0}{r_0} \right) - \frac{\cos k r_0}{r_0} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \cdot \frac{\partial}{\partial r_1} \left(\frac{\cos(k r_1 - n t)}{r_1} \right) \right] d\omega \qquad (245\text{a})$$

Hierin ist, da der Sammelpunkt 0 im Innern des Raumes liegen mufs, über den sich das Integral erstreckt, die Richtung von N nach der Seite der abnehmenden Werthe von r_0 zu nehmen. Führen wir die vorkommenden Differentiationen aus, so ergiebt sich:

$$4\pi . \varphi_0 = \int \left[\frac{\cos k r_0}{r_0} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \cdot \left\{ \frac{k \sin(k r_1 - n t)}{r_1} + \frac{\cos(k r_1 - n t)}{r_1^2} \right\} - \frac{\cos(k r_1 - n t)}{r_1} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} \cdot \left\{ \frac{k \sin(k r_0)}{r_0} + \frac{\cos k r_0}{r_0^2} \right\} \right] d\omega \qquad (245\text{b})$$

wobei also das Integral nur über die gedachte Fläche auszudehnen ist, welche die Oeffnung in dem schwarzen Schirm verschliefst.

Wenn wir dieselben Betrachtungen, die wir auf die Gleichung (245) angewendet haben, auch auf die Gleichung (209) anwenden, wonach für irgend eine geschlossene Fläche

$$0 = \int \left(\varphi \cdot \frac{\partial}{\partial N} \left(\frac{\sin(k r_0)}{r_0} \right) - \frac{\sin(k r_0)}{r_0} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial N} \right) d\omega$$

ist, so erhalten wir entsprechend der Gleichung (245b) für $\varphi = \frac{\sin(k r_1 - n t)}{r_1}$

$$0 = \int \left[\frac{\sin k r_0}{r_0} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} \cdot \left\{ - \frac{k \cos(k r_1 - n t)}{r_1} + \frac{\sin(k r_1 - n t)}{r_1^2} \right\} - \frac{\sin(k r_1 - n t)}{r_1} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} \cdot \left\{ - \frac{k \cos k r_0}{r_0} + \frac{\sin(k r_0)}{r_0^2} \right\} \right] d\omega$$

Ziehen wir die rechte Seite dieser Gleichung von der rechten Seite der Gleichung (245b) ab, so ergiebt sich

$$4\pi \varphi_0 = \int \left[\frac{k}{r_0 r_1} \left(\frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \sin(k(r_0 + r_1) - n t) + \frac{1}{r_0 r_1} \left(\frac{1}{r_1} \cdot \frac{\partial r_1}{\partial N} - \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial r_0}{\partial N} \right) \cos\left(k(r_0 + r_1) - n t\right) \right] d\omega \qquad (245\text{c})$$

§ 61. Einführung elliptischer Coordinaten.

Zur Ausführung des Integrales der letzten Gleichung (245c) wollen wir andere Coordinaten benutzen. Zu diesem Zwecke ziehen wir eine gerade Verbindungslinie zwischen dem Störungspunkte 1 und dem angenommenen Sammelpunkte 0, welche wir im Nachfolgenden stets als Axe bezeichnen wollen. Diese Verbindungslinie nehmen wir als x-Axe, und zwar ihre Mitte als Nullpunkt an und lassen x in der Richtung von 1 nach 0 hin wachsen; die Entfernung ϱ von dieser Verbindungslinie bilde die andere Coordinate. Es stellt dann ϱ die Länge des Lothes dar, welches von einem in beliebiger Richtung seitlich gelegenen Punkte auf die x-Axe gefällt wird. Ferner denken wir uns eine Reihe von Ebenen durch die x-Axe hindurch gelegt, deren Neigungen gegen eine beliebig unter ihnen ausgewählte mit α bezeichnet werde. Diese Ebenen wollen wir im Folgenden „Meridianebenen“ nennen.

Nunmehr wollen wir unsere Coordinaten weiter umformen, indem wir in jeder Meridianebene sogenannte elliptische Coordinaten benutzen. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$x = \pm A \,.\, \sqrt{1 - \mu^2} \,.\, \sqrt{1 + \sigma^2} \tag{248}$$

und

$$\varrho = A \,.\, \mu \,.\, \sigma, \tag{249}$$

wodurch zwei neue Variable, μ und σ, eingeführt und in ihrer Beziehung zu den alten Coordinaten x und ϱ definirt sind. Dabei soll $2A$ gleich dem Abstand der Punkte 0 und 1 sein. Führen wir den Werth von σ aus Gleichung (249) in Gleichung (248) ein, so ergiebt sich, nachdem wir quadrirt haben:

$$x^2 = A^2 . (1 - \mu^2) . \left(1 + \frac{\varrho^2}{A^2 \mu^2}\right)$$

oder nach Division durch $A^2 . (1 - \mu^2)$:

$$\frac{x^2}{A^2 . (1 - \mu^2)} - \frac{\varrho^2}{A^2 \mu^2} = 1 \tag{250}$$

Das ist aber die Gleichung einer Hyperbel, und zwar einer Hyperbel, deren reelle in die x-Axe fallende Hauptaxe die Länge $A . \sqrt{1 - \mu^2}$, und deren Nebenaxe die Länge $A . \mu$ hat, deren Brennpunkte also den Abstand $2A$ besitzen und mithin in die Punkte 0 und 1 fallen.

Führen wir aber den Werth von μ aus Gleichung (249) in Gleichung (248) ein, so erhalten wir analog:

$$x^2 = A^2 . (1 + \sigma^2) . \left(1 - \frac{\varrho^2}{A^2 \sigma^2}\right)$$

oder

$$\frac{x^2}{A^2 . (1 + \sigma^2)} + \frac{\varrho^2}{A^2 \sigma^2} = 1 \tag{251}$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse, deren halbe grofse Axe gleich $A . \sqrt{1 + \sigma^2}$, und deren halbe kleine Axe gleich $A . \sigma$ ist, deren Brennpunkte also auch den Abstand $2A$ besitzen und in die Punkte 0 und 1 fallen. Die Beziehungen auf die beiden Axen der Ellipse können nicht mit einander vertauscht werden, da bei reellem Werthe von σ, den wir voraussetzen wollen, stets $A . \sqrt{1 + \sigma^2} > A . \sigma$ ist.

Es zeigt sich also, dafs die Curven von gleichem μ und von gleichem σ Kegelschnitte sind, und zwar bilden die μ-Curven ein System von Hyperbeln und die σ-Curven ein System von Ellipsen. Allen diesen Curven ist A, der halbe Abstand der beiden Brennpunkte von einander, gemeinsam.

Ueber die Gestalt der verschiedenen Ellipsen ist nun Folgendes zu bemerken:

Wenn $\sigma = 0$ ist, so wird die kleine Axe der Ellipse, die ja gleich $2 A \sigma$ ist, verschwinden, d. h. die Ellipse wird sich in die grofse Axe, also in eine Gerade zusammenziehen, und zwar ist deren Länge, die allgemein gleich $2 A . \sqrt{1 + \sigma^2}$ ist, hier gleich $2A$. In demselben Maafse, wie σ wächst, wachsen auch die kleinen Axen der Ellipsen, sie bekommen aber auch, da der Abstand der Brennpunkte derselbe bleibt, gröfsere grofse Axen, und zwar sind dieselben gleich $2 A . \sqrt{1 + \sigma^2}$. Für sehr grofse Werthe von σ gehen die Ellipsen, da dann der Unterschied zwischen der grofsen und kleinen Axe, $2 A \sigma$ und $2 A . \sqrt{1 + \sigma^2}$ verschwindet, in Kreise über, deren Radius gleich $A . \sigma$ zu setzen ist. Es ist demnach σ eine Gröfse, die von Null bis Unendlich wachsen kann. Den Werth Null hat sie in der Verbindungslinie der Brennpunkte, den Werth Unendlich in allen unendlich weit entfernten Punkten.

Ueber die Abhängigkeit der Gestalt der verschiedenen Hyperbeln von dem Parameter μ ist Folgendes zu sagen:

Ist $\mu = 0$, so haben wir den einen Grenzfall, dafs die beiden Hyperbeläste sich reduciren auf die beiderseitigen Verlängerungen der zwischen den Brennpunkten gezogenen Verbindungslinie. Die

Länge der Hauptaxe ist in diesem Falle gleich $2A$, während die Nebenaxe sich auf Null zusammenzieht. Läfst man nun μ wachsen, so nimmt die Hauptaxe stets ab, da sie gleich $2A.\sqrt{1-\mu^2}$ ist, während die Länge der Nebenaxe $A.\mu$ wächst. Bei $\mu = 1$ ist der andere Grenzfall erreicht, indem dann die Hauptaxe gleich Null geworden ist, und die beiden Hyperbeläste in jeder Ebene mit der ϱ-Axe zusammenfallen.

Um also sämmtliche möglichen Ellipsen und Hyperbeln zu erhalten, welche die beiden in dem Abstande $2A$ von einander entfernt liegenden Punkte zu Brennpunkten haben, müssen wir σ von Null bis Unendlich und μ von 0 bis 1 variiren.

Indem wir uns nun in jeder Meridianebene alle diese Ellipsen und Hyperbeln gezogen denken, entsteht eine Schaar von Rotationsellipsoiden und zweischaligen Rotationshyperboloiden.

Die Anwendung der elliptischen Coordinaten hat den Vortheil, dafs für alle Punkte, die auf einem und demselben Ellipsoid liegen, die Summe der Entfernungen r_1 und r_0, also die Summe der Länge der beiden Strahlen, denen wir zu folgen haben, wenn wir von dem Ausgangspunkte der Strahlen zu irgend einem beliebigen Punkte hingehen und von da weiter zu dem Sammlungspunkte der Strahlen, immer die gleiche Gröfse hat, und dafs also die Strahlen, welche gleichzeitig von einem Brennpunkte ausgegangen sind, mit übereinstimmenden Phasen in dem anderen Brennpunkte eintreffen und sich dadurch gegenseitig verstärken. Die Strahlen von gleichem Werthe des Parameters σ repräsentiren in der That diejenigen Strahlen, welche in dem Sammelpunkte mit gleicher Phase wieder eintreffen. Wenn wir uns also durch die Fläche der Oeffnung hindurch die Reihe der Ellipsoide construirt denken, bei denen die Gröfse $k(r_1 + r_0)$ um je eine halbe Wellenlänge zunimmt, so wird jeder dadurch aus der Fläche der Oeffnung herausgeschnittene Ring Strahlen enthalten, welche sich in ihrer Wirkung beim Eintreffen in dem Sammelpunkte verstärken, während die Strahlen benachbarter Ringe sich gegenseitig schwächen.

§ 62. Die Eigenschaften elliptischer Coordinaten.

Bevor wir von den elliptischen Coordinaten zur Umformung des Integrales der Gleichung (245c) Gebrauch machen können, müssen wir einige allgemeine Eigenschaften derselben und einige aus ihnen sich ergebende Formeln ableiten.

1. Zunächst wollen wir nachweisen, dafs in jeder Meridianebene die beiden Systeme von Kegelschnitten orthogonale Systeme sind, d. h. dafs jede Curve des einen Systems rechtwinklig von jeder Curve des anderen Systems geschnitten wird. Aus den Gleichungen (248) und (249) ergiebt sich für einen constanten Werth von σ

$$\left.\begin{aligned} dx &= \mp \frac{A \cdot \mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \sqrt{1+\sigma^2} \cdot d\mu \\ \text{und} \quad d\varrho &= A \cdot \sigma \cdot d\mu, \end{aligned}\right\} \tag{252}$$

für einen constanten Werth von μ aber

$$\left.\begin{aligned} dx &= \pm \frac{A \cdot \sigma}{\sqrt{1+\sigma^2}} \cdot \sqrt{1-\mu^2} \cdot d\sigma \\ \text{und} \quad d\varrho &= A \cdot \mu \cdot d\sigma \end{aligned}\right\} \tag{253}$$

Die Tangente des Winkels, den eine irgendwo an die Curve gelegte Tangente mit der x-Axe macht, erhalten wir durch Bildung des diesem Punkte der Curve entsprechenden Quotienten $\frac{d\varrho}{dx}$. Wenn wir diesen Winkel für die Curven mit constantem σ mit α_σ, hingegen für die Curven mit constantem μ mit α_μ bezeichnen, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_\sigma &= \mp \frac{\sigma}{\mu} \cdot \sqrt{\frac{1-\mu^2}{1+\sigma^2}} \\ \text{und} \quad \operatorname{tg} \alpha_\mu &= \pm \frac{\mu}{\sigma} \cdot \sqrt{\frac{1+\sigma^2}{1-\mu^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{254}$$

Es ist also:

$$\operatorname{tg} \alpha_\sigma = -\operatorname{cotg} \alpha_\mu \tag{255}$$

und daher:

$$\alpha_\sigma = \alpha_\mu \pm \frac{\pi}{2}. \tag{255a}$$

Die Tangenten der beiden Curven stehen also auf einander senkrecht, und die Curven selbst, die Ellipsen und die Hyperbeln, schneiden sich stets rechtwinklig.

2. Die grofse Axe der Ellipse, welche gleich $2A \cdot \sqrt{1+\sigma^2}$ ist, entspricht der Summe der Brennstrahlen r_0 und r_1, so dafs also:

$$2A \cdot \sqrt{1+\sigma^2} = r_0 + r_1, \tag{256}$$

während bei den Hyperbeln die Differenz der Brennstrahlen gleich der reellen Axe der Hyperbeln ist, so dafs also

$$\pm 2 A . \sqrt{1 - \mu^2} = r_1 - r_0. \tag{257}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= A . \left(\sqrt{1 + \sigma^2} \pm \sqrt{1 - \mu^2}\right) \\ \text{und} \quad r_0 &= A . \left(\sqrt{1 + \sigma^2} \mp \sqrt{1 - \mu^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{258}$$

Damit haben wir aber die beiden Entfernungen, welche der betreffende Punkt von den beiden Brennpunkten hat. Aufserdem ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial \mu} &= \mp \frac{A \mu}{\sqrt{1 - \mu^2}} \\ \text{und} \quad \frac{\partial r_0}{\partial \mu} &= \pm \frac{A \mu}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{259}$$

so dafs also

$$\frac{\partial r_1}{\partial \mu} = - \frac{\partial r_0}{\partial \mu}, \tag{259a}$$

was auch daraus gefolgert werden kann, dafs $r_1 + r_0$ von μ unabhängig ist. Ferner folgt aus den Gleichungen (258)

$$r_1 . r_0 = A^2 . (\sigma^2 + \mu^2). \tag{260}$$

Bevor wir nun aber die hier erhaltenen Werthe benutzen können, müssen wir eine geeignete Festsetzung über die Form der Grenzfläche machen, über welche wir das Integral der Gleichung (245c) auszudehnen haben.

§ 63. Annahme über eine bestimmte Form der ideellen Grenzfläche, welche die Oeffnung verschliesst.

Die Grenzfläche, welche die Oeffnung in dem schwarzen Schirme verschliefst, und über welche wir die Integration ausdehnen müssen, wollen wir uns nun gebildet denken: erstens, aus lauter schmalen Streifen der Rotationshyperboloide $\mu = \text{const.}$, die von je zwei unendlich wenig gegen einander geneigten Meridianebenen ausgeschnitten werden und sich von den einzelnen Elementen der Oeffnungsgrenze bis zu der Geraden 0 1 erstrecken; zweitens, aus denjenigen unendlich schmalen Stücken der Meridianebenen, welche die Verbindungen zwischen den eben genannten Streifen bilden,

also von zwei Hyperbelstücken begrenzt sind, deren Parameter μ nur um unendlich wenig von einander differiren.

Es tritt damit, genau genommen, freilich eine Aenderung in der Curvenführung der Oeffnung ein; denn wir haben nunmehr eine eckige Curve, welche abwechselnd aus den Projectionen der ursprünglichen Curvenelemente auf die Meridianflächen und aus dazu senkrechten Stücken besteht. Da diese beliebig klein angenommen werden können, so kann die Annäherung an die ursprüngliche Curve beliebig weit getrieben werden, und daher ist es berechtigt, die neue Curvenführung an die Stelle der bisherigen zu setzen.

Weil sowohl r_0 wie r_1 in die Meridianebenen fallen, so ist für die letztgenannten Theile unserer Integrationsfläche

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = \frac{\partial r_1}{\partial N} = 0 \tag{261}$$

und wir haben daher das Integral unserer Gleichung (245c) nur über die Hyperboloidstreifen auszudehnen. Bei diesen fällt aber die Richtung der Normalen N in die Schnittlinien der Flächen von constanten σ-Werthen, also der Rotationsellipsoide, mit den Meridianebenen. Während in Richtung dieser Lothe σ constant bleibt, wird aber μ sich ändern. Die Differentialquotienten nach N werden sich also durch die Differentialquotienten nach μ ausdrücken lassen.

Da das Linienelement dN in einer Meridianebene liegt, so ist hier zu setzen:

$$dN^2 = dx^2 + d\varrho^2 \tag{262}$$

und zwar müssen wir diejenigen Werthe von dx und $d\varrho$ nehmen, welche einer Aenderung von μ bei constantem σ entsprechen. Nach unseren Gleichungen (252) sind diese:

$$dx = \mp \frac{A\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \sqrt{1+\sigma^2} \cdot d\mu$$

und

$$d\varrho = A.\sigma.d\mu.$$

Und daher ist:

$$dN^2 = A^2.\left(\sigma^2 + \frac{\mu^2.(1+\sigma^2)}{1-\mu^2}\right).d\mu^2$$

$$= A^2.\frac{\sigma^2+\mu^2}{1-\mu^2} \cdot d\mu^2. \tag{262a}$$

Also ist:

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial N}\right)^2 = \frac{1}{A^2} \cdot \frac{1-\mu^2}{\sigma^2+\mu^2}$$

oder

$$\frac{\partial \mu}{\partial N} = \pm \frac{1}{A} \cdot \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\sigma^2+\mu^2}}. \tag{262b}$$

Nun ist aber:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} = \frac{\partial r_1}{\partial \mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial N}$$

und indem wir hierin aus den Gleichungen (259) und (260) die Werthe einsetzen, ergiebt sich:

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} = \mp \frac{A\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} \cdot \frac{1}{A} \cdot \sqrt{\frac{1-\mu^2}{\sigma^2+\mu^2}}.$$

Oben ist festgesetzt, dafs die Normalen nach der Seite gezogen sein sollen, auf der der Punkt 0 liegt. Es mufs also r_1 mit N wachsen, d. h. $\frac{\partial r_1}{\partial N}$ ist positiv. Mithin ist

$$\frac{\partial r_1}{\partial N} = \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+\mu^2}}. \tag{263}$$

Zufolge Gleichung (259a) ist dann:

$$\frac{\partial r_0}{\partial N} = -\frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+\mu^2}}. \tag{263a}$$

Führen wir diese beiden letzten Werthe und aus Gleichung (260) den Werth

$$r_0 \cdot r_1 = A^2 . (\sigma^2 + \mu^2)$$

in das Integral der Gleichung (245c) ein, so erhalten wir, indem wir das Integral der Uebersichtlichkeit halber in zwei Integrale zerlegen

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\varphi_0 = & \int \frac{k}{A^2.(\sigma^2+\mu^2)} \cdot \frac{2\mu}{\sqrt{\sigma^2+\mu^2}} \sin\left(k(r_0+r_1)-nt\right) d\omega \\ & + \int \frac{1}{A^2.(\sigma^2+\mu^2)} \left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_0}\right) \frac{\mu}{\sqrt{\sigma^2+\mu^2}} \cos\left(k(r_0+r_1)-nt\right) d\omega \end{aligned}\right\} \tag{264}$$

oder, wenn wir beachten, dafs

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{r_0+r_1}{r_0 r_1} = \frac{2A\sqrt{1+\sigma^2}}{A^2.(\sigma^2+\mu^2)} \tag{265}$$

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\varphi_0 = & \int \frac{2k\mu}{A^2.(\sigma^2+\mu^2)\sqrt{\sigma^2+\mu^2}} \sin\left(2kA\sqrt{1+\sigma^2}-nt\right) d\omega \\ & + \int \frac{2\mu\sqrt{1+\sigma^2}}{A^3.(\sigma^2+\mu^2)^2\sqrt{\sigma^2+\mu^2}} \cos\left(2kA\sqrt{1+\sigma^2}-nt\right) d\omega \end{aligned}\right\} \tag{264a}$$

Es ist nunmehr noch der Werth des Flächenelementes $d\omega$ in den neuen Coordinaten auszudrücken. Wir gelangen dazu durch folgende Betrachtung:

Die Breite eines Hyperboloidstreifens, über deren Gesammtheit sich die Integration erstreckt, ist an jeder Stelle gleich $\varrho . d\alpha$, wenn $d\alpha$ die unendlich kleine Neigung zwischen den beiden Meridianebenen bezeichnet, welche den Streifen seitlich begrenzen. Wir wollen nun als Flächenelement das unendlich kleine Rechteck wählen, dessen Breite gleich $\varrho . d\alpha$ und dessen Länge gleich dl ist, wenn wir unter dl ein Element der Schnittlinie einer Meridianfläche mit einem Hyperboloid verstehen. Diese Schnittlinie ist ein Stück einer Hyperbel. Es ist nun:

$$dl^2 = dx^2 + d\varrho^2, \tag{266}$$

wobei aber zu beachten ist, dafs wir bei der Berechnung von dx und $d\varrho$, weil dl auf einer Hyperbel liegt, μ constant annehmen müssen. Dann ist nach den Gleichungen (253)

$$dx = \pm \frac{A . \sigma}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \cdot \sqrt{1 - \mu^2} . d\sigma$$

und

$$d\varrho = A . \mu . d\sigma$$

und demnach

$$dl^2 = \frac{A^2}{1 + \sigma^2} \cdot \left[\sigma^2 . (1 - \mu^2) + \mu^2 (1 + \sigma^2)\right] . d\sigma^2$$

$$= \frac{A^2}{1 + \sigma^2} \cdot (\sigma^2 + \mu^2) . d\sigma^2$$

oder

$$dl = \frac{A}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \cdot \sqrt{\sigma^2 + \mu^2} . d\sigma . \tag{267}$$

Es ist also

$$\left. \begin{aligned} d\omega &= \varrho . d\alpha . dl \\ &= \varrho \frac{A}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \cdot \sqrt{\sigma^2 + \mu^2} . d\alpha . d\sigma \end{aligned} \right\} \tag{268}$$

oder, wenn wir für ϱ aus Gleichung (249) seinen Werth

$$\varrho = A . \sigma . \mu$$

einsetzen,

$$d\omega = A^2 . \sigma . \mu \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2 + \mu^2}{1 + \sigma^2}} \cdot d\alpha . d\sigma . \tag{268a}$$

Dadurch verwandelt sich aber Gleichung (264a) in:

$$\left.\begin{aligned}4\pi\varphi_0 = \iint \frac{2k\sigma\mu^2}{\sigma^2+\mu^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\sin\left(2kA\sqrt{1+\sigma^2}-nt\right)d\alpha\, d\sigma \\ +\iint\frac{2\sigma\mu^2}{A.(\sigma^2+\mu^2)^2}\cdot\cos\left(2kA\sqrt{1+\sigma^2}-nt\right)d\alpha\, d\sigma\end{aligned}\right\} \quad (264\,b)$$

Wir führen nun eine neue Integrationsvariable ein, indem wir

$$s = \sqrt{1+\sigma^2} \qquad (269)$$

setzen; dann ist

$$\sigma^2+\mu^2 = \mu^2+s^2-1 \qquad (269\,a)$$

$$\sigma\, d\sigma = s\, ds \qquad (269\,b)$$

und somit wird

$$\left.\begin{aligned}4\pi\varphi_0 = \iint\frac{2k\mu^2}{\mu^2+s^2-1}\sin(2kAs-nt)\,d\alpha\, ds \\ +\iint\frac{2s\mu^2}{A(\mu^2+s^2-1)^2}\cos(2kAs-nt)\,d\alpha\, ds\end{aligned}\right\} \quad (264\,c)$$

Wir können nun das erste Integral partiell integriren, wodurch die Gröfse k, sofern sie nicht in dem Argument des Sinus vorkommt, weggeschafft wird. Es ist:

$$\left.\begin{aligned}&\iint\frac{2k\mu^2}{\mu^2+s^2-1}\cdot\sin(2kAs-nt).d\alpha.ds \\ &= -\int\overline{\underline{\frac{\mu^2.\cos(2kAs-nt)}{A.(s^2+\mu^2-1)}}}\cdot d\alpha \\ &\quad+\int d\alpha\int\frac{\mu^2.\cos(2kAs-nt)}{A}\cdot\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{s^2+\mu^2-1}\right)\cdot ds \\ &= -\int\overline{\underline{\frac{\mu^2}{A.(s^2+\mu^2-1)}\cdot\cos(2kAs-nt).d\alpha}} \\ &\quad-\iint\frac{2s\mu^2}{A.(\mu^2+s^2-1)^2}\cdot\cos(2kAs-nt).d\alpha.ds\end{aligned}\right\} \quad (270)$$

Wenn wir diesen Werth in Gleichung (264c) einsetzen, heben sich zwei Integrale fort, und wir erhalten:

$$4\pi\varphi_0 = -\int\overline{\underline{\frac{\mu^2}{A.(s^2+\mu^2-1)}\cdot\cos(2kAs-nt)\cdot d\alpha}}. \qquad (264\,d)$$

Die horizontalen Striche, zwischen welche der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck eingeschlossen ist, bezeichnen, dafs er zwischen den Grenzen zu nehmen ist, die für das partiell integrirte Integral vorgeschrieben waren. Diese Grenzen sind hier durch die Ausdehnung der Oeffnung gegeben.

Da wir an Stelle des Parameters σ jetzt die Variable s eingeführt haben, so ist zu beachten, dafs in der Axe, d. h. also, in der Verbindungslinie der beiden Brennpunkte, $s = 1$, weil hier $\sigma = 0$ ist. Aufserhalb der Axe ist $\sigma > 0$, und daher $s > 1$. Für unendliche Entfernung werden beide, σ und s, unendlich grofs. Wenn also die Oeffnung des Schirmes sehr grofs ist, so wird s einen verhältnifsmäfsig hohen Werth annehmen können, während μ^2 als Maximum nur den Werth 1 erreichen kann. Es ist aber ersichtlich, dafs an der unteren Grenze nur dann $s = 1$, also $\sigma = 0$ ist, wenn die Axe durch die Oeffnung hindurch geht. Schneidet dagegen die Verbindungslinie die Oeffnung nicht, können also die Strahlen nicht geradlinig von dem Ausgangspunkte des Lichtes zu dem Sammelpunkte gelangen, so kommt der Werth $s = 1$ nicht vor, sondern dann wird auch für die untere Grenze ein Werth $s > 1$ zu setzen sein, und zwar werden für die verschiedenen Werthe von α, also für die verschiedenen Meridianebenen auch verschiedene Werthe für die untere Grenze von s eintreten.

§ 64. Integration des für das Wellenpotential φ_0 erhaltenen Werthes.

Die in unserer Gleichung (264e) vorkommende Integration ist nach α auszuführen, d. h. also, nach dem Winkel, den die Meridianebenen mit einer beliebig festgesetzten Ebene bilden. Für jede Meridianebene sind nun im allgemeinen die Grenzen von s verschieden, und wir können also α als Function von s betrachten. Es ist daher gestattet, an Stelle von $d\alpha$ in unseren Integralen $\frac{d\alpha}{ds}ds$ zu setzen und in diesem Sinne die Integration auszuführen. Bei dieser ist zu beachten, dafs die Nenner nothwendig positive Gröfsen sind, die sich nicht in kurzen Perioden ändern, sondern im allgemeinen von gewissen kleinsten Werthen zu einem gröfsten Werthe wachsen.

Indem wir für $d\alpha$ die erwähnte Substitution machen, verwandelt sich die Gleichung (264d) in

$$4\pi\varphi_0 = -\int \frac{\mu^2 . \cos(2kAs - nt)}{A(s^2 + \mu^2 - 1)} \cdot \frac{d\alpha}{ds} \cdot ds$$

und hier haben wir, da wiederum s als Integrationsvariable auftritt, dieselben Grenzen als Integrationsgrenzen, welche wir bisher durch die horizontalen Striche andeuteten. Durch partielle Integration ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
&-\int\frac{\mu^2 . \cos(2kAs - nt)}{A(s^2 + \mu^2 - 1)}\cdot\frac{d\alpha}{ds}\cdot ds = \\
&\qquad -\,\overline{\underline{\frac{1}{k}\cdot\frac{\mu^2}{2A^2(s^2+\mu^2-1)}\cdot\sin(2kAs - nt)\cdot\frac{d\alpha}{ds}}} \\
&\qquad\quad + \frac{1}{k}\int\frac{1}{2A^2}\cdot\sin(2kAs - nt)\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{\mu^2\dfrac{d\alpha}{ds}}{s^2+\mu^2-1}\right)\cdot ds
\end{aligned}\right\}\quad (271)$$

Wir haben nun zu überlegen, wie sich diese Ausdrücke verhalten, wenn k sehr grofs wird. Beide enthalten den Factor $\frac{1}{k}$, und dieser wird unendlich klein, wenn die Wellenlänge unendlich klein wird, da $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ist. Die Sinuswerthe sind immer echte Brüche, können also dadurch, dafs sie als Factor auftreten, keine unendlich grofsen Werthe hervorrufen; dasselbe gilt von dem Factor $\frac{\mu^2}{4A^2(s^2+\mu^2-1)}$, wohl aber könnten die Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{ds}$ und $\frac{d^2\alpha}{ds^2}$ unendlich grofs werden und dadurch bewirken, dafs selbst bei einem unendlich grofsen Werthe von k der betreffende Theil des Gliedes noch berücksichtigt werden müfste.

Wir brauchen also nur diejenigen Theile weiter zu beachten, in denen einer der Differentialquotienten unendlich grofs wird. Alle übrigen Theile verschwinden.

Für den Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{ds}$ tritt dieses zunächst ein, wenn die Grenzcurve der Oeffnung für eine gewisse Strecke auf einem der Rotationsellipsoide liegt; dann wird sich s auf dieser Strecke nicht ändern, während α um einen endlichen Betrag wächst. An einer solchen Stelle würden wir demnach keinen Differentialquotienten $\frac{d\alpha}{ds}$ bilden können, und wir müfsten für diesen Theil des Integrationsintervalles wieder auf die Form der ursprünglichen Gleichung (264e), also auf die Form:

$$-\int\overline{\underline{\frac{\mu^2 . \cos(2kAs - nt)}{A . (s^2+\mu^2-1)}}}\cdot d\alpha$$

zurückgreifen, bei der die Integration aber ohne Weiteres leicht ausgeführt werden kann. Denn sowie s constant ist, wird die Gröfse, über welche wir nach der ursprünglichen Vorschrift integriren sollen, ein constanter Factor, und zur Ausführung der Integration brauchen wir diesen nur mit der Gröfse α des betreffenden Winkels zu multipliciren. Es ist dann also dieser Theil des Integrales gleich

$$-\frac{\mu^2 . \cos(2kAs - nt)}{A . (s^2 + \mu^2 - 1)} . \overline{\underline{\alpha}}$$

wo unter μ, das im Allgemeinen eine Function von α ist, ein mittlerer Werth verstanden wird.

Wenn die Verbindungslinie zwischen dem Ausgangspunkt und dem Sammelpunkt durch die Oeffnung geht, so wird stets $\frac{d\alpha}{ds}$ unendlich. Die untere Grenze des Integrals ist dann nämlich $s = 1$, und zwar umfafst sie den ganzen Kreis, welcher die Verbindungslinie unmittelbar umgiebt, so dafs hier

$$\overline{\underline{\alpha}} = 2\pi$$

ist.

Falls nun für keinen Theil der Grenzcurve der Oeffnung s constant ist, kein endlicher Theil also auf einem der Rotationsellipsoide liegt, so wird, wie wir gesehen, die obere Grenze des Integrals sehr klein, und es ergiebt sich unter Berücksichtigung des oben abgeleiteten Werthes der unteren Grenze

$$-\int \overline{\underline{\frac{\mu^2 . \cos(2kAs - nt)}{A . (s^2 + \mu^2 - 1)}}} . d\alpha = \frac{\mu^2 . \cos(2kA - nt)}{A\mu^2} . 2\pi$$
$$= \frac{2\pi . \cos(2kA - nt)}{A}$$

mithin

$$\varphi_0 = \frac{\cos(2kA - nt)}{2A} \qquad (272)$$

d. h. φ_0 erhält denselben Werth, den es auch ohne den Schirm erhalten würde. Liegt aber die Grenzcurve der Oeffnung ganz oder theilweise auf einem jener Rotationsellipsoide, so tritt noch der auf diese Grenze bezügliche Werth

$$-\frac{\mu^2 . \cos(2kAs - nt)}{A(s^2 + \mu^2 - 1)} . \overline{\underline{\alpha}}$$

hinzu. Dieser ist aber jedenfalls kleiner, als der von der unteren

Grenze herrührende Werth; denn es ist, da in dieser Grenze $s^2 > 1$ sein mufs,

$$\frac{\mu^2}{s^2 + \mu^2 - 1} < 1.$$

Liegt nur ein Theil der Oeffnung auf einem der Rotationsellipsoide, so ist auch noch der Factor

$$\overline{\underline{\alpha}} < 2\pi.$$

Geht die Verbindungslinie zwischen Ausgangspunkt und Sammelpunkt der Lichtbewegung nicht durch die Oeffnung, sondern durch den schwarzen Schirm, so fällt der von der unteren Grenze herrührende Hauptheil des Integralwerthes fort, und es bleibt eventuell nur der stets viel kleinere zweite Theil bestehen.

Es ist zu beachten, dafs dieser zweite Theil des Integralwerthes nur an ganz bestimmten vereinzelten Punkten vorkommen kann. Er wird, wie aus seiner Form hervorgeht, um so kleiner sein, je gröfser s bei constantem μ ist, d. h. je gröfser das Rotationsellipsoid ist, auf dessen Oberfläche das betreffende Stück der Grenze liegt; er wird ferner um so kleiner sein, je kleiner bei constantem s der Werth von μ ist, d. h. je mehr sich das Stück der Grenze von der auf der Mitte der Verbindungslinie senkrecht stehenden Ebene entfernt.

Nun ist noch weiter der Fall möglich, dafs $\frac{d\alpha}{ds}$ an einzelnen Punkten unendlich grofs würde, was dann bedeutet, dafs der Werth von s für diese Werthe von α ein Maximum oder Minimum wird. Für den entfernteren Theil der Oeffnung wird sich stets ein solches Maximum bilden. Es wird auch immer ein Minimum auftreten; aber wenn die Curve continuirlich gekrümmt ist, so wird man diesen Fall als einen besonderen Fall des eben behandelten betrachten können, indem man den einen Punkt, an dem der Differentialquotient $\frac{d\alpha}{ds}$ unendlich grofs ist, als eine unendlich kurze Strecke betrachtet, die auf einem der Rotationsellipsoide liegt. Wir müssen dann also auch hier wieder auf die ursprüngliche Integralform

$$-\int \frac{\mu^2 . \cos(2kAs - nt)}{2A(s^2 + \mu^2 - 1)} . d\alpha$$

zurückgehen; aber der bei der Integration auftretende Factor $\overline{\underline{\alpha}}$ wird hier gleich Null, da er zwischen unendlich nahen Grenzen zu nehmen ist.

Die bisherigen Ergebnisse unserer Discussion können wir nunmehr dahin zusammenfassen, dafs die in Gleichung (271) angegebene partielle Integration nur dann zu benutzen ist, wenn der im ersten Gliede der rechten Seite dieser Gleichung vorkommende Differentialquotient $\frac{d\alpha}{ds}$ einen endlichen Werth hat, dafs in diesem Falle aber das erste Glied selbst verschwindet.

Welchen Werth erhält dann aber das zweite Glied

$$\frac{1}{k}\cdot\int\frac{1}{2A^2}\cdot\sin(2kAs-nt)\cdot\frac{d}{ds}\left(\frac{\mu^2\frac{d\alpha}{ds}}{s^2+\mu^2-1}\right)\cdot ds$$

unserer Gleichung (271)? Wird die Differentiation ausgeführt, so erhält man

$$-\frac{1}{k}\int\frac{2\mu}{2A^2.(s^2+\mu^2-1)^2}\cdot\left(\mu s+\frac{d\mu}{ds}-s^2\frac{d\mu}{ds}\right)\cdot\frac{d\alpha}{ds}\cdot\sin(2kAs-nt)\,ds$$
$$+\frac{1}{k}\int\frac{\mu^2}{2A^2(s^2+\mu^2-1)}\cdot\frac{d^2\alpha}{ds^2}\cdot\sin(2kAs-nt)\,ds.$$

Da hier $\frac{d\alpha}{ds}$ endlich vorausgesetzt wird und $\frac{d\mu}{ds}$ höchstens in einzelnen Punkten der Grenze unendlich werden kann, was bei der Endlichkeit von μ das Integral nicht unendlich machen kann, so wird das erste Integral wegen des Factors $\frac{1}{k}$ sehr klein. In dem zweiten Integral könnte nun zwar $\frac{d^2\alpha}{ds^2}$ unendlich werden, aber unter der gemachten Voraussetzung höchstens in der Weise, dafs $\int\frac{d^2\alpha}{ds^2}ds$ noch einen endlichen Werth giebt; unser Integral enthält aufserdem unter dem Integralzeichen nur noch Factoren, welche echte Brüche sind, und soll ferner noch durch den unendlich grofsen Factor k dividirt werden. Das Glied verschwindet daher.

Es ergiebt sich also, dafs die rechte Seite der Gleichung (264 d) für unendlich kleine Wellenlängen nur dann einen dauernd bleibenden Werth hat, wenn die Axe durch die Oeffnung hindurch geht. Enthält die Oeffnungsgrenze endliche Theile, die auf einem der Rotationsellipsoide liegen, so treten noch endliche Theile des Integrales auf, welche aber sehr klein sind, und von denen zu beachten ist, dafs sie sich nur auf ganz bestimmte Ausgangspunkte und Sammelpunkte beziehen; denn für die unmittelbar daneben liegenden Punkte, die eine etwas andere Lage der Axe bedingen, fällt

dieser Theil des Integrales fort. Bei Vernachlässigung dieser Theile haben wir also nach Gleichung (272)

$$\varphi_0 = \frac{\cos(2\,k\,.\,A - n\,t)}{2\,A}. \tag{273}$$

Da nun aber $2\,A$ die Entfernung zwischen dem Ausgangs- und dem Sammelpunkte der Lichtbewegung ist, die wir hier einmal mit r bezeichnen wollen, so dafs also die letzte Gleichung die Form

$$\varphi_0 = \frac{\cos(k\,r - n\,t)}{r} \tag{274}$$

erhält, so zeigt sich, wie schon oben bemerkt, dafs in diesem Falle φ_0 in dem Sammelpunkte der Strahlen genau denselben Werth hat, den es haben würde, wenn gar kein Schirm da wäre. Das wird der Fall sein für alle die Punkte, die man vom Ausgangspunkte aus geradlinig erreichen kann, ohne auf den Schirm selbst zu treffen. Hingegen wird im allgemeinen φ_0 in allen denjenigen Punkten verschwinden, wo diese Verbindungslinie den Schirm schneidet. Dadurch ist also in der That die Lehre von der Strahlung des Lichtes begründet, aber nur als ein Grenzfall, welcher vollständig nur dann eintritt, wenn die Wellenlängen unendlich klein sind.

§ 65. Uebereinstimmung mit der Erfahrung.

Die thatsächlichen Erfahrungen über die Fortpflanzung des Lichtes sind nun in vollkommener Uebereinstimmung mit den eben gemachten Auseinandersetzungen. Wir wissen aus dem alltäglichen Leben, dafs, so oft wir Strahlen, namentlich solche, die von einem sehr eng begrenzten Lichtpunkte ausgehen, durch Oeffnungen hindurchgehen lassen, welche verhältnifsmäfsig grofs sind gegen die Wellenlängen des Lichtes, ein Lichtkegel entsteht, welcher von geradlinigen Strahlen begrenzt ist. Die Grenze wird um so schärfer, je feiner der Lichtpunkt ist. Gewöhnlich haben wir es mit Lichtquellen zu thun, welche eine gewisse Ausdehnung haben, und dann sind auch die Schattengrenzen bis zu einem gewissen Grade verwaschen, weil dann die Schattengrenze für den einen Rand der Lichtquelle an einer anderen Stelle liegt, wie für den anderen Rand. Es ist dann in einer gewissen Breite weder Vollschatten, noch volle Lichtstärke, sondern ein sogenannter Halbschatten, indem die Punkte dieses Raumes geradlinige Strahlen nur von einem Theile, und nicht mehr von der ganzen Lichtquelle erhalten. Je enger der Ausgangspunkt der Strahlen ist, je mehr er sich einem

geometrischen Punkte in Bezug auf seine Ausdehnung nähert, desto schärfer sind also die Schattengrenzen.

Geht die Verbindungslinie zwischen dem Ausgangspunkte und dem betrachteten Punkte gerade durch den Rand der Oeffnung, dann bleibt von dem Integrationsintervall auf der linken Seite unserer Gleichung (272) nur noch die Hälfte bestehen, und es wird demnach die Lichtintensität an einer solchen Stelle auf die Hälfte derjenigen reducirt, welche in dem vollen Lichtkegel herrscht. Da die Wellenlängen in Wirklichkeit nicht unendlich klein sind, so wird in Wirklichkeit auch die Schattengrenze nicht absolut scharf sein, sondern immer von schwachen Diffractionserscheinungen, abwechselnd hellen und dunklen, bei weifsem Lichte aber auch farbigen Säumen umgeben sein. Es finden sich noch Spuren anderer heller Grenzlinien in dem dunkeln Raume, und dafür tritt eine gewisse Schwächung des Lichtes in dem hellen Raume am Rande des Schattens ein. Wir wollen hiervon aber von jetzt an absehen und die völlig geradlinige Verbreitung des Lichtes annehmen.

Fünfter Theil.

Geometrische Optik.

Erster Abschnitt.

Die Spiegelung.

§ 66. Allgemeines.

Die Existenz von geradlinigen Lichtstrahlen und die Ausbreitung des Lichtes in ihnen ist eine schon im Alterthum bekannte Beobachtungsthatsache. Es erscheint dabei in der Vorstellung der Menschen jeder einzelne Strahl gleichsam als ein unabhängiges mechanisches Ganze, das sich selbständig fortbewegt, ohne durch seine Nachbarschaft beeinflufst zu sein. In Wahrheit verhält es sich allerdings, wie wir gesehen haben, nicht so. Das thatsächlich Bestehende ist die Wellenbewegung, und die Strahlen sind nur mathematisch geometrische Gebilde: die Normalen der Wellenflächen. Allerdings gehen die Wellenflächen in Richtung der Strahlen vorwärts; aber die Unterbrechung einer Wellenfläche durch einen schattengebenden Körper läfst doch die Bewegung in der nächsten Nachbarschaft nicht ungestört. Im Gegentheil zeigten uns die Untersuchungen über die Beugung, dafs eine seitliche Ausbreitung der Wellen vorkommt, und eine ungestörte Fortpflanzung neben einem schattengebenden Körper nicht möglich ist. Damit ein Strahl in einer bestimmten Richtung vorwärts gehe, kommt es, wie wir gesehen haben, darauf an, dafs die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden unmittelbar benachbarten Strahlen an dem gegebenen Endpunkte ohne gegenseitige Zeitdifferenz anlangen. Wenn sie alle in derselben Zeit von dem einen Punkt zu dem anderen Punkt sich fortpflanzen, also auch mit gleicher Phase an-

kommen, — nicht blofs der eine gleichsam isolirte geometrische Strahl, der der wirklichen Verbindungslinie entspricht, sondern auch die benachbarten Strahlen —, so können sie sich gegenseitig verstärken und eine gemeinsame Wirkung hervorbringen. Man kann diese Bedingung auch dahin aussprechen, dafs die Zeit, die ein Strahlenbündel gebraucht, welches eine Aenderung seiner Richtung z. B. durch Reflexion an einer Fläche erfährt, um einen bestimmten Endpunkt zu erreichen, ein Maximum oder Minimum sein müsse. Geschieht nun die Bewegung in demselben Medium, so entspricht gleicher Länge des Weges auch gleiche Zeit der Fortpflanzung; kommen verschiedene Medien in Betracht, so mufs die Verschiedenheit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit berücksichtigt werden. Dieses ist von Wichtigkeit für die Processe, die an den festen Begrenzungsflächen des Raumes, in welchem sich das Licht ausbreitet, vor sich gehen. Wir kennen als solche Processe die Reflexion oder Spiegelung und die Brechung des Lichtes; bei letzterer wird ein Theil des Lichtes aber auch stets an der Grenzfläche reflectirt, und tritt nur zum Theil in das andere Medium ein, welches jenseits der Grenzfläche liegt. Solche Reflexionen oder Brechungen finden überall da statt, wo das Licht auf die Grenzfläche eines zweiten Mediums auftrifft, in dem seine Fortpflanzungsgeschwindigkeit eine andere ist.

Nun lehrt uns die Beobachtung, dafs in einem solchen Falle, wo die verschiedenen Strahlen eines Bündels nicht unter wesentlich verschiedenen Einfallswinkeln auf die Grenzfläche auffallen, alle Strahlen dabei zwar zuweilen eine Phasenänderung erleiden, dafs diese aber für die einzelnen Strahlen stets die gleiche ist, so dafs also für die weitere Verfolgung des Weges aller dieser Strahlen dieselbe Constante zu der Weglänge hinzu zu rechnen ist.

§ 67. Das Spiegelungsgesetz.

Es müssen also die zurückgeworfenen Strahlen, falls sie zu einer gemeinsamen Wirkung in einem Punkte sich vereinigen sollen, in diesem mit gleicher Phase eintreffen. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn für die verschiedenen Strahlen die Weglänge von dem leuchtenden Punkte nach der Grenzfläche, vermehrt um die Weglänge von der Grenzfläche nach dem Vereinigungspunkt, dieselbe ist, wobei vorausgesetzt ist, dafs die Fortpflanzung der zurückgeworfenen Strahlen in demselben Medium geschieht, wie die der einfallenden Strahlen, was bei der Spiegelung des Lichtes der Regel nach der Fall ist. Wir wollen mit 0 den Ausgangspunkt des Lichtes, mit r_0

die Länge des Strahles bis zur Reflexionsfläche, und mit r_1 die Länge von hier bis zu dem Punkte 1 bezeichnen, für den die Wirkung untersucht werden soll. Wenn dann für eine Reihe von Strahlen, die auf die verschiedenen Punkte der Fläche auftreffen, die Summe $r_0 + r_1$ entweder constant ist oder sich nur um Gröfsen von einander unterscheidet, welche kleiner sind, als eine halbe Wellenlänge, so wird eine gegenseitige Verstärkung eintreten. Erst, wenn ihre Wegdifferenz eine halbe Wellenlänge überschreitet, wird ein Theil der Strahlen einen anderen Theil aufheben, indem ihre Bewegung dann in jedem Zeitmoment in entgegengesetzter Richtung stattfindet.

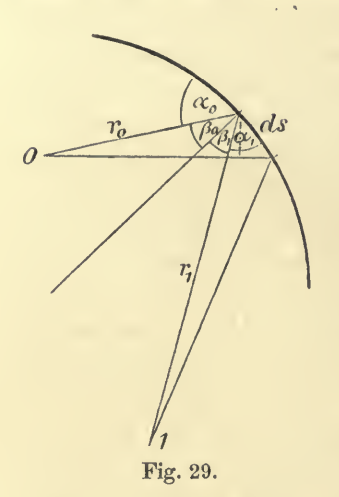


Fig. 29.

Es kommt also darauf an, dafs für die verschiedenen Strahlen diese Summe $r_0 + r_1$ möglichst kleine Unterschiede habe, die aber auf jeden Fall weniger als eine halbe Wellenlänge betragen müssen. Der Werth von $r_0 + r_1$ wird nun für zwei Punkte der Fläche, von denen jeder in der auf den anderen bezüglichen Einfallsebene, d. h. in der Ebene, welche den leuchtenden Punkt, den Sammelpunkt und den Einfallspunkt enthält, liegt, und die beide um die unendlich kleine Strecke ds von einander entfernt sind, verschiedene Gröfse haben. Bezeichnen wir den Werth von $r_0 + r_1$ für den einen der beiden Punkte mit C, so können wir den Werth für den anderen Punkt nach dem Taylor'schen Lehrsatz als Function von ds entwickeln und bekommen dann:

$$r_0 + r_1 = C + \frac{d}{ds}(r_1 + r_0) . ds + \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2}{ds^2}(r_1 + r_0) . ds^2 + \dots \quad (275)$$

Da wir nun die Entfernung ds als sehr klein angenommen haben, so brauchen wir nur diejenigen Glieder zu beachten, welche die niedrigsten Potenzen von ds enthalten.

Die erste Bedingung, dafs die Unterschiede der verschiedenen Strahlen verschwinden, würde darin bestehen, dafs der Differentialquotient

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{ds}(r_1 + r_0) = 0 \\ \text{oder} \quad &\frac{dr_1}{ds} + \frac{dr_0}{ds} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (276)$$

sei. Dann wird ein Bündel von Strahlen, die dem ersten einfallenden Strahl unmittelbar benachbart sind, nach diesem Punkte abgelenkt werden können, ohne dafs eine wirkliche Phasendifferenz zwischen ihnen auftritt.

Ziehen wir den Strahl nach dem an dem anderen Ende von ds liegenden Punkte, so wird (siehe Fig. 29) hier r_0 etwas länger, und den Unterschied können wir bei unendlich kleinen Werthen von ds finden, indem wir von dem ersten Einfallspunkte ein Loth auf den zweiten Strahl fällen; es ist dann der Unterschied der Länge gegeben durch die andere Kathete des dadurch entstandenen kleinen rechtwinkligen Dreiecks. Wir nennen nun α_0 den spitzen Winkel zwischen dem einfallenden Strahl r_0 und der Richtung von ds, oder, was dasselbe ist, zwischen r_0 und der Tangente, die in der Einfallsebene an die reflectirende Fläche gelegt ist. Es ist dann jener Zuwachs von r_0 gegeben durch die Gleichung

$$dr_0 = ds \,.\, \cos\alpha_0 \tag{277}$$

und daraus folgt:

$$\frac{dr_0}{ds} = \cos\alpha_0 \tag{277a}$$

In ganz analoger Bezeichnung erhalten wir

$$\frac{dr_1}{ds} = -\cos\alpha_1 \tag{278}$$

Das negative Zeichen tritt hier ein, weil r_1 für spitze Winkel α_1 abnimmt. Indem wir die Werthe der Gleichungen (277a) und (278) in Gleichung (276) einsetzen, ergiebt sich:

$$-\cos\alpha_1 + \cos\alpha_0 = 0$$

oder

$$\cos\alpha_1 = \cos\alpha_0 \,. \tag{279}$$

Denkt man sich auf der Fläche im Einfallspunkt eine Normale errichtet, das sogenannte Einfallsloth, so werden die Winkel, welche r_1 resp. r_0 mit dieser Normale machen, die wir mit β_1 resp. β_0 bezeichnen wollen, die Complementwinkel zu α_1 und α_0 bilden, und wir können daher die letzte Gleichung auch schreiben:

$$\sin\beta_1 = \sin\beta_0$$

oder

$$\beta_1 = \beta_0 \,. \tag{279a}$$

Damit haben wir das bekannte Reflexionsgesetz abgeleitet, dafs der Winkel, den der einfallende Strahl mit dem Einfallslothe macht, gleich ist dem Winkel, den der reflectirte Strahl mit dem Einfallslothe bil-

det, oder dafs der Einfallswinkel des Strahles gleich dem Reflexionswinkel ist.

Bei einer solchen Reflexion besteht der wirkliche Vorgang in der Zurückwerfung der Wellensysteme. Indem diese sich dann weiter ausbreiten, findet Uebereinstimmung der Phasen in derjenigen Richtung statt, die durch unsere Ableitung als die Reflexionsrichtung der Strahlen erwiesen wird, und in der thatsächlich auch allein Licht merkbar ist.

§ 68. Die Bildpunkte bei spiegelnden Flächen.

Die zweite Bedingung dafür, dafs in unserer Gleichung (275) der Werth von $r_1 + r_0$ ein Maximum oder Minimum ist, besteht darin, dafs das dritte Glied auf der rechten Seite verschwindet, also

$$\frac{d^2 r_1}{d s^2} + \frac{d^2 r_0}{d s^2} = 0 \tag{280}$$

ist. Setzen wir hierin die Werthe der Gleichungen (277a) und (278) ein, so erhalten wir

$$-\frac{d}{d s}(\cos \alpha_1) + \frac{d}{d s}(\cos \alpha_0) = 0$$

oder

$$\frac{d}{d s}(\cos \alpha_1) = \frac{d}{d s}(\cos \alpha_0)$$

oder

$$\sin \alpha_1 \cdot \frac{d \alpha_1}{d s} = \sin \alpha_0 \cdot \frac{d \alpha_0}{d s} \cdot \tag{281}$$

Wir wissen nun schon, dafs bei der Reflexion die Summe der ersten Differentialquotienten nur dann gleich Null ist, wenn $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_0$; diese Bedingung mufs aber erfüllt sein, wenn überhaupt die zweite Bedingung in Betracht kommen soll; denn es ist nur dann von Belang, ob die Glieder mit dem Factor $d s^2$ gleich Null sind, wenn bereits die Glieder mit dem Factor $d s$ gleich Null sind. Daher verwandelt sich unsere letzte Gleichung, indem wir noch den Factor $d s$ auf beiden Seiten hinzufügen, in

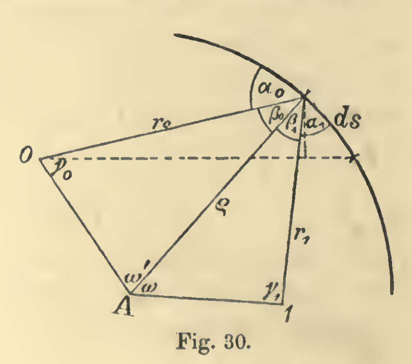


Fig. 30.

$$\frac{d \alpha_1}{d s} \cdot d s = \frac{d \alpha_0}{d s} \cdot d s. \tag{281a}$$

Wir tragen nunmehr die Länge des Krümmungsradius ϱ der Fläche an dem Orte des Elementes ds auf dem im Einfallspunkte errichteten Lothe ab und verbinden (Fig. 30) den Endpunkt A mit den Punkten 0 und 1. Die Bezeichnung der Winkel α und β sei dieselbe, wie vorhin; die Bedeutung der übrigen Benennungen γ_0, γ_1 ω und ω' geht aus der Figur hervor. Dabei ist ersichtlich, dafs

$$\omega + \omega' = c,$$

wo c einen constanten Winkel bezeichnet. Nun ist in dem einen Dreieck

$$\gamma_1 + \omega + \beta_1 = \pi \tag{282}$$

und in dem anderen Dreieck

$$\gamma_0 + \omega' + \beta_0 = \pi$$

oder

$$\gamma_0 + c - \omega + \beta_0 = \pi . \tag{283}$$

Berücksichtigen wir nun, dafs

$$\beta_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha_0$$

und

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_1$$

so ergiebt sich aus den Gleichungen (282) und (283)

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_1 + \omega - \frac{\pi}{2} \\ \text{und} \qquad & \\ \alpha_0 &= \gamma_0 + c - \omega - \frac{\pi}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{284}$$

Wenn wir nun nach ds differentiiren und mit ds multipliciren, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{ds}\cdot ds &= \frac{d\gamma_1}{ds}\cdot ds + \frac{d\omega}{ds}\cdot ds \\ \text{und} \qquad & \\ \frac{d\alpha_0}{ds}\cdot ds &= \frac{d\gamma_0}{ds}\cdot ds - \frac{d\omega}{ds}\cdot ds. \end{aligned}\right\} \tag{284a}$$

Wir haben nun oben aber in Gleichung (281a) die Bedingung dafür, dafs in dem Werthe von $r_1 + r_0$ auch die unendlich kleinen Glieder zweiter Ordnung verschwinden, darin gefunden, dafs die linken Seiten dieser beiden Gleichungen (284a) einander gleich sind. Wir können diese Bedingung also nunmehr schreiben:

$$\frac{d\gamma_1}{ds}\cdot ds + \frac{d\omega}{ds}\cdot ds = \frac{d\gamma_0}{ds}\cdot ds - \frac{d\omega}{ds}\cdot ds \tag{285}$$

oder, da wir die einzelnen Glieder der Gleichung als vollständige Differentiale auffassen können:

$$d\gamma_1 + d\omega = d\gamma_0 - d\omega$$

oder

$$d\gamma_0 - d\gamma_1 = 2 \, . \, d\omega \, . \tag{285a}$$

Es ist nun $r_1 \, . \, d\gamma_1$ die Länge des Lothes, welches wir von dem ersten Endpunkt der Strecke ds auf den nach dem zweiten Endpunkt gezogenen Strahl r_1 fällen, und aus dem kleinen rechtwinkligen Dreieck ergiebt sich:

$$r_1 \, . \, d\gamma_1 = - ds \, . \sin \alpha_1 \, , \tag{286}$$

da $d\gamma_1$ negativ ist und wir ds und die Winkel α_1 und α_0 stets positiv nehmen wollen. Statt ds können wir nun aber $\varrho \, . \, d\omega$ setzen, so dafs wir also erhalten

$$r_1 \, . \, d\gamma_1 = - \varrho \, . \, d\omega \, . \sin \alpha_1$$

oder

$$d\gamma_1 = - \frac{\varrho \, . \sin \alpha_1}{r_1} \cdot d\omega \tag{286a}$$

und analog ergiebt sich

$$d\gamma_0 = \frac{\varrho \, . \sin \alpha_0}{r_0} \cdot d\omega \, . \tag{287}$$

Indem wir diese Werthe für $d\gamma_1$ und $d\gamma_0$ in die Gleichung (285a) einführen und ferner für die nach dem Reflexionsgesetz gleichen Winkel α_0 und α_1 die gemeinsame Bezeichnung α einführen, folgt

$$\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{\varrho}{r_1} \right) . \sin \alpha \, . \, d\omega = 2 \, d\omega$$

oder

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} = \frac{2}{\varrho \, . \sin \alpha} \, . \tag{288}$$

Wenn wir nun an Stelle des Winkels α den Einfallswinkel, d. h. den Winkel zwischen Strahl und Einfallsloth benutzen, so erhalten wir:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} = \frac{2}{\varrho \, . \cos \beta} \, . \tag{288a}$$

Das ist die gewöhnliche Formel für die Reflexion an sphärischen Spiegeln, wobei r_0 die Entfernung des leuchtenden Punktes von dem Spiegel, r_1 die seines Bildes, und ϱ den Radius des Spiegels bezeichnet. Wir haben sie hier allerdings nur für ein unendlich

kleines spiegelndes Flächenelement abgeleitet und für die Strahlen, die in der Einfallsebene liegen.

Da wir bei unserer Ableitung die Entfernungen auf derjenigen Seite des Spiegels, von welcher das Licht einfällt, d. h. auf der der leuchtende Punkt 0 liegt, als positiv gerechnet haben, so ist bei einem convexen Spiegel, wo ϱ auf der anderen Seite liegt, dieser Werth als negative Gröfse in die Formel einzuführen.

Gewöhnlich wird die Formel für nahehin senkrechte Incidenz entwickelt; dann steht auch der reflectirte Strahl beinahe senkrecht auf der Spiegelfläche, so dafs β nahe gleich Null ist, und man als Annäherung $\cos\beta = 1$ setzen kann. Dann ergiebt sich

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} = \frac{2}{\varrho} \cdot \tag{289}$$

Es ist dieses die meistentheils zur Berechnung der Bilder bei sphärischen Spiegeln benutzte Formel.

Unsere Formeln (288) und (288a) sind allgemeiner, da sie auch auf schräge Incidenz Bezug nehmen. Aus ihnen geht zunächst hervor, dafs für $r_0 = \infty$, d. h. wenn die Lichtstrahlen von einem unendlich entfernten leuchtenden Punkte kommen, $r_1 = \frac{\varrho \cdot \cos\beta}{2}$ oder bei senkrechter Incidenz $r_1 = \frac{\varrho}{2}$ wird. Man nennt diese Entfernung vom Spiegel, in welcher die Strahlen eines unendlich entfernten Gegenstandes sich vereinigen, die Brennweite des Spiegels. Sie ist also für senkrecht einfallende Strahlen gleich dem halben Krümmungsradius. Bezeichnen wir sie mit F, so ist also

$$F = \frac{\varrho}{2} \cdot \tag{290}$$

Wendet der Spiegel den auffallenden Strahlen die convexe Seite zu, so ist, wie wir sahen, ϱ negativ zu rechnen; es hat dann also auch F einen negativen Werth, d. h. der Brennpunkt liegt hinter dem Spiegel. Bei einem Concavspiegel liegt der Brennpunkt hingegen auf der Seite der einfallenden Strahlen. Hat bei einem solchen r_0 einen endlichen positiven Werth, der gröfser ist als die Brennweite, so mufs auch r_1 gröfser sein als die Brennweite und das Bild mufs von dem Spiegel abrücken, je näher der Gegenstand kommt. Befindet sich der Gegenstand in der doppelten Brennweite, ist also $r_0 = \varrho$, so wird für senkrechte Incidenz auch $r_1 = \varrho$. Nähert sich der Gegenstand so weit, dafs er in den Brennpunkt

rückt, wird also $r_0 = \frac{\varrho}{2}$, so wird für senkrechte Incidenz r_1 unendlich. Man kann dann sagen, dafs von dem Hohlspiegel in unendlicher Entfernung ein Bild erzeugt wird. Da dabei die Strahlen parallel werden, so kann man sich auch die parallelen Strahlen hinter dem Spiegel fortgesetzt denken, und daher ist ebenso gut die Auffassung möglich, dafs das Bild in unendlicher Entfernung hinter dem Spiegel liegt. Bei weiterer Annäherung des Gegenstandes an den Spiegel würde r_0 noch kleiner werden, und es mufs dann $\frac{1}{r_1}$, also auch r_1 einen negativen Werth erhalten, was dann aussagt, dafs das Bild hinter den Spiegel fällt.

Zur näheren Erläuterung über das Zustandekommen der Bildpunkte wollen wir noch folgende Betrachtung anstellen. Wenn wir uns um den Ausgangspunkt 0 und den Sammelpunkt 1 als Brennpunkte Ellipsen construirt denken, so ist für die an derselben Ellipse reflectirten Strahlen $r_0 + r_1 = \text{const.}$, und daher werden in der That alle Strahlen, welche von dem einen Brennpunkte ausgegangen sind, in dem anderen Brennpunkte wieder vereinigt. Nun folgt aus den bekannten geometrischen Gesetzen der Ellipse, dafs diese beiden Winkel, welche die Strahlen r_0 und r_1 mit der Curve bilden, gleich sind. Wenn nun die Tangente einer anderen Curve an einer beliebigen Stelle mit der Tangente an die Ellipse zusammenfällt, so würde die Weglänge des an dieser Stelle gespiegelten Strahles immerhin ein Maximum erreichen, und dasselbe würde auch bei einer Spiegelung an der Tangente selbst der Fall sein, aber es würde doch nicht am Orte des zweiten Brennpunktes der Ellipse eine Sammlung der Strahlen stattfinden. Dieses tritt erst dann ein, wenn für eine Fläche, die einen Brennpunkt in den Punkt 1 werfen soll, nicht blofs die Tangente, sondern auch die Krümmung sich derjenigen der Ellipse genau anschliefst. Dann erst wird ein ganzes Strahlenbündel, welches hier auf die spiegelnde Fläche auffällt, in demselben Brennpunkte vereinigt werden.

§ 69. Spiegelung an einer beliebig gekrümmten Fläche. — Astigmatische Strahlenbündel.

Wir haben in unserer bisherigen Betrachtung vorausgesetzt, dafs das an dem anderen Ende von ds auf der spiegelnden Fläche errichtete Loth in der durch die Reflexion an dem Orte des ersten Endes von ds gegebenen Einfallsebene liegt. Das braucht aber bei

beliebig gekrümmten Flächen nicht der Fall zu sein; sondern es kann die Normale des zweiten Punktes aus der Einfallsebene des im ersten Punkte reflectirten Strahles herausfallen, und dann würde der zweite Strahl überhaupt nicht mit dem ersten Strahl zusammentreffen. Wir würden aber durch das Verfahren, was wir bisher eingeschlagen haben, immer noch diejenigen Bedingungen bestimmen können, unter welchen die optische Länge der Strahlen am wenigsten variirt. Das ist die eigentliche Bedeutung der gemachten Auseinandersetzung.

Wir haben uns auf diese Annahme zunächst beschränkt, weil es der praktisch wichtigste Fall ist. Wir müssen uns aber stets daran erinnern, dafs möglicherweise der Strahl thatsächlich einen anderen Verlauf nimmt, und dafs der zweite Strahl den ersten überhaupt nicht schneidet.

Wenn wir irgend welche reflectirende Fläche haben und einen leuchtenden Punkt, von dem eine Reihe von Strahlen mit der Länge r_0 auf die Fläche fallen und je nach der Art des Auffallens in verschiedener Richtung reflectirt werden, so würden wir auf den reflectirten Strahlen, deren Richtung durch das erwähnte Spiegelungsgesetz gegeben ist, Strecken r_1 abschneiden können, welche zusammen mit den Strecken r_0 stets dieselbe Summe geben. Dadurch gewinnen wir eine Fläche, für deren einzelne Punkte die optische Länge der gespiegelten Strahlen von dem leuchtenden Punkte aus gemessen gleiche Länge hat. Wenn wir nun eine constante kurze Strecke weiter gehen, so würden wir durch die neuen Endpunkte wiederum eine Fläche legen können, für deren Punkte die optische Länge eine etwas andere wäre, als die der ersten Fläche. Wir würden auf diese Weise eine Reihe von Flächen construiren können, welche unter der allgemeinen Gleichung

$$r_1 + r_0 = \text{const.}$$

gegeben wären. Ferner ist leicht ersichtlich, dafs die Strahlen, an denen wir bei dieser Messung entlang gehen, auf diesen Flächen senkrecht stehen müssen. Wenn man dieses beachtet, zeigt sich sofort, dafs die Strahlenbündel, welche durch Reflexion von einer continuirlich gekrümmten Fläche entstehen, mit dem System von Normalen zusammenfallen müssen, die man auf einer der Flächen $r_1 + r_0 = \text{const.}$ errichtet. Nimmt man aber eine beliebige krumme Fläche und construirt für die einzelnen Punkte derselben die Normalen, so giebt es für jeden Punkt der Fläche zwei Ebenen, die durch das Verhalten der Normalen benachbarter Elemente charak-

terisirt sind, und welche man als die Hauptkrümmungsebenen bezeichnet. Die benachbarten Normalen, welche in einer der Hauptkrümmungsebenen liegen, schneiden nämlich die Normale, welche durch den ursprünglichen Punkt gelegt ist, alle in einem Punkte. Auf diese Weise erhalten wir für jeden Punkt einer beliebig gekrümmten Fläche zwei Hauptkrümmungshalbmesser, deren Längen den Abständen vom Fufspunkt der Normale bis zu den Schnittpunkten entsprechen.

Die Strahlen, welche von einem continuirlich gekrümmten Flächenstück reflectirt werden, schneiden sich also nicht alle in einem Punkt, sondern es wird dieses nur bei den Strahlen der Fall sein, welche mit dem Mittelstrahl in einer der beiden Hauptkrümmungsebenen liegen. Daraus ergiebt sich also, dafs die allgemeine Form der Strahlenbündel, welche durch Reflexion entstehen können, nicht von der Art ist, dafs sich alle Strahlen in einem Punkte schneiden; es wird dieses vielmehr nur als besonderer Fall eintreten.

Legen wir durch den Scheitel eines Ellipsoids in verschiedener Richtung Schnitte hindurch, so werden diese verschiedene Krümmung haben. Wenn nun auf den in der Ebene der Zeichnung (Fig. 31) dargestellten Schnitt der gekrümmten Fläche ein paralleles

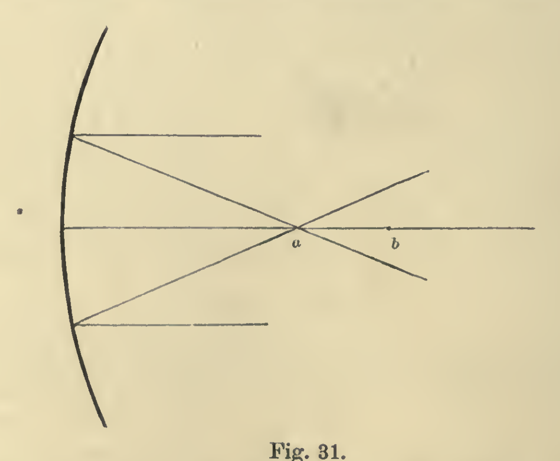


Fig. 31.

Strahlenbündel auffällt, so werden die Strahlen so reflectirt, dafs sie in dem Punkte a in einer gewissen Entfernung von dem Scheitel, die dem halben Krümmungshalbmesser dieser Schnittebene entspricht, vereinigt werden, während ein Schnitt in einer anderen Ebene einen anderen Krümmungshalbmesser und also auch eine

andere Vereinigungsweite in dem Punkte *b* für die Strahlen haben kann. Es werden dann in der Zeichnungsebene die vertical von einander abweichenden Strahlen von oben nach unten vereinigt sein, so dafs der Strahlenkegel, der von einem kleinen Flächenstück ausgeht, von oben nach unten zusammengedrängt wird und sich in einer auf der Ebene der Zeichnung senkrecht stehenden Linie vereinigt. Die Strahlen, welche in einer zur Zeichnungsebene senkrechten Ebene liegen, würden dann nach unserer Annahme in gröfserer Entfernung zu einer in der Zeichnungsebene liegenden Linie vereinigt werden. Man bezeichnet so beschaffene Strahlenbündel als astigmatische Strahlenbündel. Stigma wird dabei als Bezeichnung des Brennpunktes gebraucht, und astigmatisch ist also ein Strahlenbündel, welches keinen eigentlichen Brennpunkt hat, sondern dessen Vereinigung in einer verwickelteren Weise geschieht.

Wenn der spiegelnde Theil der Fläche kreisförmig begrenzt ist, dann wird der Querschnitt des zurückgeworfenen Strahlenbündels sich in der Richtung von oben nach unten schneller verkleinern, als in der senkrecht zur Ebene der Zeichnung stehenden Richtung, und dadurch wird er zunächst einer quer gestellten Ellipse ähnlich; diese zieht sich an der Stelle, wo der Brennpunkt für das in der Zeichnungsebene liegende Strahlenbüschel sich befindet, in eine horizontale Linie zusammen, die sich dann nach der anderen Richtung, d. h. von oben nach unten, wieder erst zu einer horizontal verlängerten Ellipse erweitert, dann durch einen Kreis und eine vertical verlängerte Ellipse in eine vertical stehende Linie übergeht, hinter der sich das Strahlenbündel wieder seitlich ausbreitet und durch vertical gestellte Ellipsen in unendlich grofser Entfernung wieder in Kreisform übergeht. Es besteht dabei allerdings ein Raum, in dem alle Strahlen sich gegenseitig sehr nahe kommen; aber sie sind doch niemals in einem Punkte vereinigt.

§ 70. Die Spiegelung an Rotationsflächen, wenn die Strahlen von einem Punkte der Axe ausgehen.

Der gewöhnliche Fall, der bisher auch fast allein zur analytischen Untersuchung gekommen ist, ist der, dafs die spiegelnden Flächen drehrunde Gestalt haben, d h. entstanden gedacht werden können dadurch, dafs eine in einer Ebene liegende Curve um eine in derselben Ebene liegende Gerade als Axe gedreht wird. Eine solche Fläche hat an jeder Stelle natürlich ebenfalls zwei Krümmungsradien; aber der eine Krümmungsradius fällt zusammen mit

dem Krümmungsradius der erzeugenden Curve, während der andere Krümmungsmittelpunkt und damit auch der andere Krümmungshalbmesser immer durch den Schnittpunkt der Normale mit der Axe gegeben ist. Denn wenn wir eine Kugel construiren, welche diesen Schnittpunkt zum Mittelpunkt hat und hier die Fläche in dem betreffenden Punkte berührt, so wird diese Berührung in einem Kreise stattfinden, und jedes Element dieses Berührungskreises fällt mit einer der Hauptkrümmungsebenen der Fläche zusammen, weil längs des Berührungskreises sich alle Normalen in demselben Punkte schneiden; der Krümmungsradius ist aber die Länge der Normale bis zum Schnittpunkt mit der Axe, d. h. der Radius der berührenden Kugel.

Wenn wir nun den leuchtenden Punkt in die Verlängerung der Axe legen, so werden für alle Strahlen, welche in demselben Meridianschnitt auffallen, die Einfallsnormalen alle in dieser Meridianebene liegen, und daher werden auch die Strahlen nach der Reflexion in derselben Ebene verbleiben. Für jede dieser Ebenen gilt dann die einfache Betrachtung, die wir in § 68 angestellt haben; denn für diese Strahlen haben wir die Entfernung $r_0 + r_1$ nur in der einen Ebene zu messen.

Alle Strahlen aber, welche auf denselben Parallelkreis auffallen, werden sich in der Axe schneiden, wie aus folgender Betrachtung hervorgeht. In Fig. 32 möge AB einen Meridianschnitt durch eine

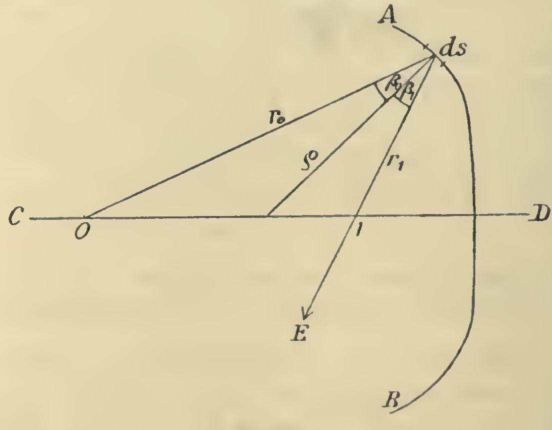


Fig. 32.

Rotationsfläche darstellen, die durch Drehung um die Axe CD entstanden ist. Es sei 0 der auf der Axe liegende leuchtende Punkt. Der auf das Element ds auffallende Strahl verbleibt in der Ebene

der Zeichnung und werde in der Richtung nach E hin reflectirt, so dafs er in dem Punkte 1 die Axe schneidet. Denken wir uns nun diese ganze Figur um die Axe gedreht, so bleiben die Spiegelungsbedingungen durchaus unverändert, und in sämmtlichen Lagen, welche durch die Drehung um die Axe eintreten, wird der in der betreffenden Meridianebene liegende Strahl so reflectirt werden, dafs er durch den Punkt 1 der Axe hindurch geht. Bei den Rotationsflächen bildet sich also unter allen Umständen ein solcher Brennpunkt in der Axe, während andererseits auf der Richtung dieser Normale nun noch eine Vereinigung in einem anderen Brennpunkt, dessen Lage von der Krümmung dieses Meridianschnittes abhängt, stattfinden kann.

Die besonders grofse Rolle, welche die Kugelfläche in der Optik spielt, beruht wesentlich darauf, dafs eine Kugel für jeden ihrer Durchmesser als ein Rotationskörper betrachtet werden kann, und demnach ein beliebig gelegener leuchtender Punkt immer in der Verlängerung einer ihrer Axen, nämlich eines ihrer Durchmesser liegt. Dadurch hat man es bei der Spiegelung an einer Kugel stets mit dem relativ einfacheren Falle zu thun, dafs der leuchtende Punkt in einer der Hauptkrümmungsebenen des Flächenelementes liegt, auf welches der Strahl fällt.

Zweiter Abschnitt.

Die Brechung.

---

§ 71. Das Brechungsgesetz.

In ähnlicher Weise, wie wir die Gesetze der Spiegelung abgeleitet haben, ergeben sich auch die Gesetze für die Brechung; nur müssen wir dabei berücksichtigen, dafs wir es bei dieser mit verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden Medien zu thun haben.

Da es nun für die Uebereinstimmung der Phasen darauf ankommt, dafs die Zeit vom Ausgangspunkte bis zum Endpunkte für die verschiedenen Strahlen des Bündels dieselbe bleibt, müssen wir in unseren Gleichungen die Weglänge ersetzen durch den Quotienten aus der Weglänge und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Diesen

Quotienten bezeichnet man gewöhnlich als die optische Weglänge des Strahles. Wenn wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in den beiden an einander angrenzenden Medien mit c_0 und c_1 bezeichnen, so haben wir in unserer Gleichung (275) $\frac{r_0}{c_0}$ bez. $\frac{r_0}{c_1}$ für r_0 bez. r_1 zu setzen; sie verwandelt sich dadurch in

$$\frac{r_0}{c_0} + \frac{r_1}{c_1} = C + \frac{d}{d\,s}\left(\frac{r_1}{c_1} + \frac{r_0}{c_0}\right) \cdot d\,s + \frac{1}{2}\,\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{r_1}{c_1} + \frac{r_0}{c_0}\right) \cdot ds^2 + \ldots \tag{291}$$

und ist nun in derselben Weise, wie früher, zu behandeln. Die zuerst zu erfüllende Bedingung ist dann wieder, dafs

$$\frac{d}{d\,s}\left(\frac{r_1}{c_1} + \frac{r_0}{c_0}\right) = 0 \tag{292}$$

oder, da die Geschwindigkeiten constant sind

$$\frac{1}{c_1} \cdot \frac{d r_1}{d\,s} = -\frac{1}{c_0} \cdot \frac{d r_0}{d\,s}. \tag{292a}$$

Diese Differentialquotienten können nun wieder durch die Cosinus der Winkel zwischen Strahl und brechender Fläche, oder durch die Sinus der Winkel zwischen dem Strahl und der Normale ausgedrückt werden. Nennen wir (Fig. 33) β_0 den Winkel zwischen Einfallsloth und dem einfallenden Strahl, und β_1 den Winkel zwischen

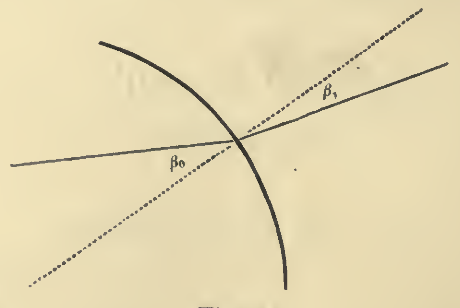


Fig. 33.

der Verlängerung des Einfallslothes und dem gebrochenen Strahl, dann ergiebt sich aus Gleichung (292a), da wir die Winkel stets positiv rechnen wollen

$$\frac{1}{c_1} \cdot \sin\beta_1 = \frac{1}{c_0} \cdot \sin\beta_0\,. \tag{292b}$$

Das ist das Brechungsgesetz in der Form, wie es von SNELLIUS aufgefunden wurde. Es folgt also unmittelbar aus dem Princip, dafs

die Fortpflanzungszeit des Strahles von einem gegebenen Anfangspunkt zu einem gegebenen Endpunkt ein Maximum oder Minimum sein mufs. Es ist dieses in der That eine schon sehr lange bekannte Form, die bereits in der Mitte des 17. Jahrhunderts von dem französischen Mathematiker FERMAT gefunden und damals mit grofser Aufmerksamkeit und vielem Nachdruck discutirt wurde. In der jetzt gebräuchlichen Form des Brechungsgesetzes benutzt man nun nicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten, sondern Gröfsen, welche sich wie die reciproken Werthe derselben verhalten, und die man als Brechungsverhältnifs bezeichnet, wobei man dem leeren Raum das Brechungsverhältnifs 1 zuschreibt. Dann würden wir also setzen können:

$$n_0 . \sin \beta_0 = n_1 . \sin \beta_1 , \tag{292c}$$

wobei n_0 und n_1 die Brechungsverhältnisse in den beiden Medien bezeichnen. Wenn nun ein Strahl aus dem leeren Raume in ein anderes optisches Medium übergeht, so ist $n_0 = 1$, und aus der Messung der Winkel β_0 und β_1 ergiebt sich dann das Brechungsverhältnifs des betreffenden Mediums.

§ 72. Die Lage der Bildpunkte.

Bei der Untersuchung, wann das Glied mit dem Factor ds^2 in unserer Gleichung (291) verschwindet, wollen wir uns auf die Annahme brechender Kugelflächen beschränken. Wir haben also dann nur die Frage zu erörtern, unter welchen Bedingungen für die in der Ebene eines Meridianschnittes stattfindende Brechung

$$\frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{r_0}{c_0} + \frac{r_1}{c_1}\right) = 0 \tag{293}$$

ist. Berücksichtigen wir nun, dafs c_0 und c_1 Constanten sind, so können wir diese Bedingung schreiben:

$$\frac{1}{c_0} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{d r_0}{ds}\right) + \frac{1}{c_1} \cdot \frac{d}{ds}\left(\frac{d r_1}{ds}\right) = 0 . \tag{293a}$$

Nun ist aber, ebenso wie bei der Spiegelung in § 67,

$$\frac{d r_0}{ds} = - \sin \beta_0$$

und

$$\frac{d r_1}{ds} = \sin \beta_1 .$$

Setzen wir diese Werthe ein, so ergiebt sich:

$$-\frac{1}{c_0}\cdot\frac{d}{d\,s}(\sin\beta_0)+\frac{1}{c_1}\cdot\frac{d}{d\,s}(\sin\beta_1)=0 \tag{293b}$$

oder, wenn wir die Differentiation ausführen und mit $d\,s$ multipliciren:

$$-\frac{1}{c_0}\cdot\cos\beta_0\cdot\frac{d\beta_0}{d\,s}\cdot d\,s+\frac{1}{c_1}\cdot\cos\beta_1\cdot\frac{d\beta_1}{d\,s}\cdot d\,s=0 \tag{293c}$$

Wir müssen nun sehen, wie wir in dieser Gleichung die Differentialquotienten ersetzen können.

In Figur 34 sei AB die brechende Fläche, 0 sei der leuchtende Punkt, 1 der Sammlungspunkt der Strahlen. Der Krümmungs-

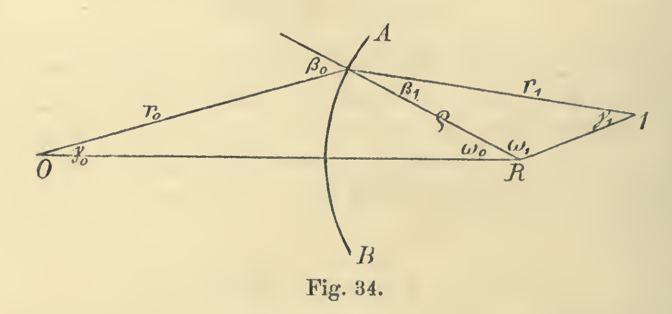


Fig. 34.

mittelpunkt des reflectirenden Elementes liege in R, der Krümmungshalbmesser sei ϱ. Die übrigen Bezeichnungen, welche sich den früher benutzten anschliefsen, gehen unmittelbar aus der Figur hervor. Wir haben dann die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\beta_0&=\gamma_0+\omega_0\\ \text{und}\qquad \beta_1&=\pi-\gamma_1-\omega_1\end{aligned}\right\} \tag{294}$$

und bei einer Verschiebung des Einfallspunktes um $d\,s$ ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\beta_0}{d\,s}\cdot d\,s&=\frac{d\gamma_0}{d\,s}\cdot d\,s+\frac{d\,\omega_0}{d\,s}\cdot d\,s\\ \text{und}\qquad \frac{d\beta_1}{d\,s}\cdot d\,s&=-\frac{d\gamma_1}{d\,s}\cdot d\,s-\frac{d\,\omega_1}{d\,s}\cdot d\,s\end{aligned}\right\} \tag{294a}$$

Da nun aber ω_0 sich um ebenso viel verkleinert, als ω_1 sich vergröfsert, so ist ferner

$$\frac{d\,\omega_1}{d\,s}\cdot d\,s=-\frac{d\,\omega_0}{d\,s}\cdot d\,s \tag{295}$$

Durch Benutzung dieser Werthe erhält nun Gleichung (293c) die Form:

$$-\frac{\cos\beta_0}{c_0}\cdot\left(\frac{d\gamma_0}{ds}+\frac{d\omega_0}{ds}\right)\cdot ds+\frac{\cos\beta_1}{c_1}\cdot\left(-\frac{d\gamma_1}{ds}+\frac{d\omega_0}{ds}\right)\cdot ds=0 \quad (293\text{d})$$

oder, wenn wir die Differentiale einführen

$$-\frac{\cos\beta_0}{c_0}\cdot(d\gamma_0+d\omega_0)+\frac{\cos\beta_1}{c_1}\cdot(-d\gamma_1+d\omega_0)=0 \quad (293\text{e})$$

Ebenso wie bei der Spiegelung (§ 68) ist nun auch hier $r_0 . d\gamma_0$ die Länge des Lothes, welches von dem ersten Endpunkte der Strecke ds auf die zweite Lage des Strahles r_0 gefällt wird. Diese ist aber

$$r_0 . d\gamma_0 = \cos\beta_0 . ds$$

und analog ist

$$r_1 . d\gamma_1 = \cos\beta_1 . ds \quad (296)$$

Da nun

$$ds = \varrho . d\omega_0$$

ist, so ergiebt sich daraus

$$d\gamma_0 = \varrho\cdot\frac{\cos\beta_0}{r_0}\cdot d\omega_0$$

und

$$d\gamma_1 = \varrho\cdot\frac{\cos\beta_1}{r_1}\cdot d\omega_0 \quad (296\text{a})$$

Setzen wir diese Werthe in Gleichung (293e) ein, so erhalten wir, indem wir den in allen Gliedern auftretenden Factor $d\omega_0$ weglassen

$$-\varrho\cdot\frac{\cos^2\beta_0}{c_0 . r_0}-\frac{\cos\beta_0}{c_0}-\varrho\cdot\frac{\cos^2\beta_1}{c_1 . r_1}+\frac{\cos\beta_1}{c_1}=0$$

oder

$$\frac{\cos\beta_1}{c_1}-\frac{\cos\beta_0}{c_0}=\frac{\varrho}{r_1}\cdot\frac{\cos^2\beta_1}{c_1}+\frac{\varrho}{r_0}\cdot\frac{\cos^2\beta_0}{c_0} \quad (293\text{f})$$

Führen wir wieder die Brechungsverhältnisse der beiden Medien n_0 und n_1 statt der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten c_0 und c_1 in diese Gleichung ein, so ergiebt sich

$$\frac{n_1 . \cos\beta_1 - n_0 . \cos\beta_0}{\varrho}=\frac{n_1 . \cos^2\beta_1}{r_1}+\frac{n_0 . \cos^2\beta_0}{r_0} \quad (293\text{g})$$

Das ist die ganz allgemeine Form der Gleichung für die Lage des Bildpunktes 1; sie gilt für beliebig schräge Incidenz der Strahlen.

Es ist zu beachten, dafs wir bei ihrer Ableitung ϱ positiv gerechnet haben, wenn die brechende Fläche ihre convexe Seite dem Medium, auf das wir den Index 0 beziehen, zukehrt; ist das Umgekehrte der Fall, so ist ϱ negativ zu nehmen.

Falls sämmtliche Einfallswinkel und Brechungswinkel an der krummen Fläche sehr klein sind, so sind die Werthe für $\cos\beta_0$, $\cos\beta_1$, und deren Quadrate sehr nahe gleich 1. Wir wollen von jetzt an diese Cosinuswerthe alle gleich 1 setzen, d. h. annehmen, dafs der Einfall der Strahlen auf einen relativ kleinen, der Axe unmittelbar benachbarten Theil der brechenden Fläche beschränkt ist; dann bekommen wir die Gleichung:

$$\frac{n_1 - n_0}{\varrho} = \frac{n_0}{r_0} + \frac{n_1}{r_1} \tag{297}$$

Damit haben wir das bekannte Gesetz der Strahlenconcentration abgeleitet, welches für eine einzelne brechende Kugelfläche gilt, hinter der ein Medium mit dem Brechungsverhältnifs n_1 und vor der ein Medium mit dem Brechungsverhältnifs n_0 sich befindet.

§ 73. Die beiden Brennweiten einer brechenden Fläche.

Wenn der leuchtende Punkt 0 in unendlicher Entfernung vor der brechenden Fläche liegt, so ist $r_0 = \infty$ zu setzen, und es wird $r_1 = \frac{\varrho \cdot n_1}{n_1 - n_0}$. Setzen wir andererseits $r_1 = \infty$, nehmen also an, dafs nach der Brechung die Strahlen der Axe parallel werden, dann wird $r_0 = \frac{\varrho \cdot n_0}{n_1 - n_0}$. Nun pflegen wir den Werth von r_1, welcher eintritt, wenn die einfallenden Strahlen aus unendlich grosser Entfernung kommen, die Brennweite für die betreffende brechende Fläche zu nennen, und zwar die zweite oder hintere Brennweite. Wir wollen sie mit F_1 bezeichnen; den Index 1 wählen wir deshalb, weil sie eine Entfernung in dem zweiten Medium repräsentirt, und wir auf dieses bisher den Index 1 angewendet haben. Den Werth von r_0, welcher als Entfernung des leuchtenden Punktes vor der Fläche gewählt werden muss, damit nach der Brechung die Strahlen parallel der Axe fortgehen, bezeichnet man als die erste oder vordere Brennweite, und den betreffenden Ort des Punktes 0 als den ersten oder vorderen Brennpunkt. Natürlich werden die Strahlen, wenn sie in umgekehrter Richtung parallel der Axe aus dem Unendlichen kommen, sich in diesem vorderen Brennpunkte

vereinigen. Die vordere Brennweite sei mit F_0 bezeichnet. Die Werthe von F_1 und F_0, welche also durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{\varrho \cdot n_1}{n_1 - n_0} \\ \text{und} \qquad F_0 &= \frac{\varrho \cdot n_0}{n_1 - n_0} \end{aligned}\right\} \tag{298}$$

gegeben werden, unterscheiden sich nur durch die Brechungsverhältnisse der beiden Medien vor und hinter der brechenden Fläche, und zwar stehen die Brennweiten direct im Verhältnifs der Brechungsverhältnisse dieser beiden Medien, so dafs also

$$F_0 : F_1 = n_0 : n_1 \tag{299}$$

Wenn wir diese Bezeichnung F_0 und F_1 für die Brennweiten in die Gleichung (297) einführen, so können wir diese schreiben

$$1 = \frac{F_0}{r_0} + \frac{F_1}{r_1} \tag{300}$$

oder, indem wir mit $r_1 . r_0$ auf beiden Seiten multipliciren

$$r_0 \cdot r_1 = F_0 \cdot r_1 + F_1 \cdot r_0 \tag{300a}$$

Zur Berechnung der Lage des Bildpunktes ist bald die eine, bald die andere der beiden letzten Gleichungen mehr geeignet. Aus beiden ergeben sich die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= \frac{F_0 \cdot r_1}{r_1 - F_1} \\ r_1 &= \frac{F_1 \cdot r_0}{r_0 - F_0} \end{aligned}\right\} \tag{300b}$$

welche oftmals benutzt werden. Aus den Werthen von F_0 und F_1 ergiebt sich ferner, dafs

$$F_1 - F_0 = \varrho \tag{301}$$

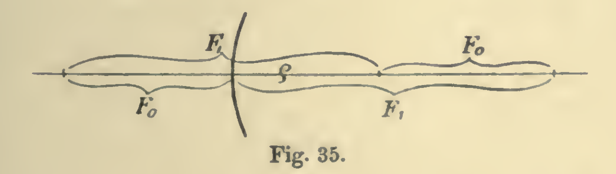


Fig. 35.

Der Krümmungsmittelpunkt des Scheitels ist also (Fig. 35) von dem vorderen Brennpunkt um die hintere Brennweite und von dem hinteren Brennpunkt um die vordere Brennweite entfernt.

Die Beziehung zwischen den Werthen von r_0 und r_1, also der Entfernungen der beiden Punkte 0 und 1 vom Scheitelpunkte der brechenden Fläche können wir noch anders formuliren, indem wir aus Gleichung (301) die Werthe

$$\left.\begin{aligned} F_0 &= F_1 - \varrho \\ \text{und} \qquad F_1 &= F_0 + \varrho \end{aligned}\right\} \tag{301a}$$

in die Gleichung (300a) einführen; dann ergiebt sich

$$r_0 \cdot r_1 = (F_1 - \varrho) \cdot r_1 + (F_0 + \varrho) \cdot r_0 \tag{300c}$$

Setzen wir nun auf der rechten Seite der identischen Gleichung

$$(r_0 + \varrho) \cdot (r_1 - \varrho) = r_0 \cdot r_1 + r_1 \cdot \varrho - r_0 \cdot \varrho - \varrho^2$$

für das erste Glied den Werth der Gleichung (300c) und für das letzte Glied nach Gleichung (301)

$$\varrho^2 = \varrho \cdot (F_1 - F_0)$$

ein, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} &(r_0 + \varrho) \cdot (r_1 - \varrho) \\ &\quad = (F_1 - \varrho) \cdot r_1 + (F_0 + \varrho) \cdot r_0 + r_1 \cdot \varrho - r_0 \cdot \varrho - \varrho \cdot (F_1 - F_0) \\ &\quad = F_1 \cdot (r_1 - \varrho) + F_0 \cdot (r_0 + \varrho) \end{aligned}\right\} \tag{302}$$

und wenn wir durch das Product $(r_0 + \varrho) \cdot (r_1 - \varrho)$ dividiren

$$1 = \frac{F_1}{r_0 + \varrho} + \frac{F_0}{r_1 - \varrho} \tag{302a}$$

Setzen wir hierin für F_1 und F_0 aus den Gleichungen (301a) die Werthe ein, so ergiebt sich

$$1 = \frac{F_0 + \varrho}{r_0 + \varrho} + \frac{F_1 - \varrho}{r_1 - \varrho} \tag{302b}$$

Diese Gleichung ist unserer früheren Gleichung (300) völlig analog. Es sind die Entfernungen der Punkte 0 und 1 hier nicht von dem Scheitel der Fläche, sondern von dem Krümmungsmittelpunkt aus gemessen, und zugleich ist an Stelle der Brennweiten, die von dem Flächenscheitel an gerechnet wurden, hier der Abstand der Brennpunkte von dem Krümmungsmittelpunkt getreten. Es ergiebt sich daraus, dafs dieselbe Formel, welche wir oben für die Bildentfernungen in Bezug auf den Scheitelpunkt der Fläche ableiteten, auch in Bezug auf den Mittelpunkt der Kugel aufgestellt werden kann.

Wir können nun noch eine andere sehr einfache Form unserer Gleichungen ableiten, indem wir die Lage des Punktes 0 auf den

vorderen, und die des Punktes 1 auf den hinteren Brennpunkt der brechenden Fläche beziehen, dabei aber die als positiv gerechneten Richtungen auf beiden Seiten unverändert lassen. Bezeichnen wir diese beiden neuen Abstände mit x_0 und x_1, so ist:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= r_0 - F_0 \\ \text{und} \qquad x_1 &= r_1 - F_1 \end{aligned}\right\} \tag{303}$$

Multipliciren wir beide Gleichungen mit einander, so ergiebt sich

$$x_0 . x_1 = r_0 . r_1 - F_1 . r_0 - F_0 . r_1 + F_0 . F_1 \tag{303a}$$

Nun ist aber nach Gleichung (300a)

$$r_0 . r_1 - F_1 . r_0 - F_0 . r_1 = 0$$

und daher folgt:

$$x_0 . x_1 = F_0 . F_1 \tag{303b}$$

Dadurch hat man eine Gleichung gewonnen, welche aussagt, dafs das Product zusammengehöriger Vereinigungsweiten, die aber von den Brennpunkten aus gerechnet sind, einer Gröfse gleich ist, die in einem gegebenen System immer constant ist, nämlich gleich dem Product der beiden Brennweiten. Es ergiebt sich also daraus unmittelbar

$$x_1 = \frac{F_0 . F_1}{x_0} \tag{303c}$$

Es ist $x_1 = \infty$, wenn $x_0 = 0$, d. h. wenn der leuchtende Punkt im Brennpunkt liegt; es ist x_1 positiv, d. h. das Bild fällt hinter den hinteren Brennpunkt, wenn x_0 positiv ist, d. h. wenn der Gegenstand von der brechenden Fläche weiter als der Brennpunkt entfernt ist, und x_1 wird endlich gleich Null, wenn $x_0 = \infty$ wird. Andererseits geht daraus hervor, da dieses Product bei der brechenden Fläche immer positiv ist, dafs, wenn $x_0 < 0$ ist, d. h. wenn der leuchtende Punkt zwischen Brennpunkt und brechender Fläche liegt, dann zugleich x_1 negativ ist, d. h. dafs das Bild in der der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen entgegengesetzten Richtung von dem hinteren Brennpunkt liegt. Das Bild tritt von $+\infty$ nach $-\infty$ nur hinüber, wenn der leuchtende Punkt durch den vorderen Brennpunkt in der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen hindurchgeht. Ist $x_0 = -F_0$, d. h. liegt der leuchtende Punkt im Scheitel der brechenden Fläche, so ist $x_1 = -F_1$, d. h. das Bild liegt ebenfalls in dem Scheitelpunkt; Object und Bild fallen also zusammen.

Aufserdem ist diese Formel sehr bequem in dem häufig vorkommenden Fall, dafs man den hinteren Brennpunkt kennt und

nur berechnet werden soll, um wie viel das Bild sich verschiebt, wenn der Gegenstand nicht in unendlicher, sondern in endlicher Entfernung liegt.

§ 74. Die Spiegelung als besondere Art der Brechung betrachtet.

Ehe wir nunmehr dazu übergehen, die Spiegelung als einen besonderen Fall der Brechung aufzufassen, müssen wir vorher nochmals im Zusammenhang uns vergegenwärtigen, in welcher Richtung wir die in den bisherigen Formeln vorkommenden Entfernungsgröfsen als positiv angenommen haben. Es wurde r_0 positiv gerechnet, wenn der leuchtende Punkt vor der brechenden Fläche lag, so dafs also der Zuwachs von r_0 positiv ist, wenn der Punkt der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen entgegen sich bewegt; hingegen wurde r_1 als positiv genommen, wenn der Vereinigungspunkt hinter der brechenden Fläche lag, und der Zuwachs dr_1 ist demnach als positiv zu betrachten, wenn der Bildpunkt sich in der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen bewegt. Der Krümmungsradius ϱ ist positiv, wenn die Fläche den auffallenden Strahlen ihre convexe Seite zukehrt. Die Brennweiten werden in demselben Sinne wie r_0 und r_1 als positiv gerechnet. Aus den für sie in den Gleichungen (298) angegebenen Werthen folgt also, dafs sie bei positivem ϱ nur dann positiv sind, wenn der Nenner dieser Ausdrücke positiv, d. h. wenn $n_1 > n_0$ ist, oder wenn das stärker brechende Medium auf der concaven Seite der brechenden Fläche liegt. Es ist dann zugleich $F_1 > F_0$.

Die bisher für die Brechung abgeleiteten Formeln kann man nun auch auf den Fall der Spiegelung übertragen.

Bei der Spiegelung hatten wir r_1 dann als positiv gerechnet, wenn der Bildpunkt vor der spiegelnden Fläche lag, also entgegengesetzt wie es bei der Brechung geschehen. Ferner hatten wir dort ϱ positiv gerechnet, wenn die concave Seite den auffallenden Strahlen zugewendet war. Wollen wir also die bei der Brechung abgeleiteten Formeln auf die Spiegelung übertragen, so haben wir sie so zu modificiren, dafs der Richtungsänderung von r_1 Rechnung getragen wird; das geschieht aber, wenn wir erstens, da die absolute Gröfse des Einfallswinkels bei der Spiegelung dieselbe ist wie die des Reflexionswinkels, $n_1 = -n_0$ setzen, und zweitens den Krümmungsradius ϱ in anderem Sinne positiv rechnen, als es bei der Spiegelung geschah.

Wenden wir diese Betrachtung nun zunächst einmal auf die für die Brennweiten F_0 und F_1 in den Gleichungen (298) angegebenen Werthe

$$F_1 = \frac{\varrho \cdot n_1}{n_1 - n_0}$$

und

$$F_0 = \frac{\varrho \cdot n_0}{n_1 - n_0}$$

an, indem wir hierin $n_1 = -n_0$ setzen; dann ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{\varrho}{2} \\ \text{und} \quad & \\ F_0 &= -\frac{\varrho}{2} \end{aligned}\right\} \tag{304}$$

Ist nun ϱ positiv, d. h. ist der Spiegel ein Convexspiegel, so ist F_1 positiv und F_0 negativ. Daraus folgt aber, dafs parallel auffallende Strahlen ihren — hier virtuellen — Sammelpunkt hinter dem Spiegel haben würden, und dafs Strahlen, welche nach der Spiegelung parallel der Axe fortgehen sollen, so auffallen müssen, dafs sie ihren Schnittpunkt vor der Spiegelung hinter der spiegelnden Fläche haben.

Für einen Concavspiegel ist ϱ negativ und daher F_1 negativ, hingegen F_0 positiv. Beide Brennpunkte liegen also vor dem Spiegel. Sie fallen thatsächlich zusammen in einem Punkte, der um die Strecke $\frac{\varrho}{2}$ vom Scheitel des Spiegels entfernt ist. Es kommt dieses daher, weil n_1 und n_0 denselben absoluten Werth haben. Der Einflufs des entgegengesetzten Vorzeichens von n_1 und n_0 wird dadurch wieder aufgehoben, dafs die mit dem Index 1 versehenen Werthe in anderer Richtung positiv zu rechnen sind, als die mit dem Index 0 versehenen.

Wenn wir nun nachweisen wollen, dafs durch unsere Annahme die allgemeine, bei der Brechung über die Lage des Bildpunktes 1 abgeleitete Gleichung (293g)

$$\frac{n_1 \cdot \cos\beta_1 - n_0 \cos\beta_0}{\varrho} = \frac{n_1 \cdot \cos^2\beta_1}{r_1} + \frac{n_0 \cdot \cos^2\beta_0}{r_0}$$

in die bei der Spiegelung abgeleitete analoge Gleichung (288) übergeht, so haben wir zuerst zu beachten, dafs zufolge unserer Annahme $n_1 = -n_0$ nach Gleichung (292c) $\beta_1 = -\beta_0$ und daher

$$\cos\beta_1 = \cos\beta_0$$

wird, wir also aus jedem Gliede einmal den Cosinuswerth fortlassen können. Durch etwas andere Anordnung erhalten wir dann:

$$\frac{n_1 - n_0}{\varrho \cdot \cos\beta} = \frac{n_1}{r_1} + \frac{n_0}{r_0}$$

Setzen wir nun $n_1 = - n_0$ und berücksichtigen, dafs jetzt die Vorzeichen von ϱ und r_1 zu wechseln sind, weil wir diese beiden Gröfsen bei der Spiegelung in anderer Richtung als positiv gerechnet haben, so ergiebt sich sofort

$$\frac{2}{\varrho \cdot \cos\beta} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_0} \tag{305}$$

Das ist aber die bei der Spiegelung abgeleitete Gleichung (288 a). Wenn wir unsere Gleichung (303 b)

$$x_0 \cdot x_1 = F_0 \cdot F_1$$

auf Spiegel anwenden, so ist zu beachten, dafs eine der beiden Brennweiten des Spiegels stets negativ, die andere positiv ist, und dafs dadurch also das Product $F_0 \cdot F_1$ immer einen negativen Werth hat, und deshalb müssen x_0 und x_1 auch stets entgegengesetzte Vorzeichen haben. Da nun aber beide in entgegengesetzter Richtung positiv gerechnet werden, so liegen Objectpunkt 0 und Bildpunkt 1 thatsächlich stets in gleicher Richtung von dem Brennpunkt des Spiegels.

Diese Auffassung der Spiegelung als einen besonderen Fall der Brechung ist manchmal bequem, besonders, wenn man mit zusammengesetzten Systemen zu rechnen hat, in denen neben den brechenden eine oder mehrere spiegelnde Flächen vorkommen. Man kann dann unmittelbar die weiter unten abgeleiteten Formeln benutzen, welche für die zusammengesetzten brechenden Systeme gelten, wenn man nur für die Spiegel das Brechungsverhältnifs hinter dem Spiegel gleich dem negativem Werth des Brechungsverhältnisses vor dem Spiegel annimmt. Es bezeichnet dieser negative Werth des Brechungsverhältnisses nur, dafs die Strahlen ihre Fortpflanzungsrichtung umkehren.

§ 75. Verallgemeinerung des Gesetzes über die Lage des Bildpunktes.

Wir haben bisher stets angenommen, dafs 0 der leuchtende Punkt und 1 der Bildpunkt, d. h. der Sammelpunkt für die von 0 ausgehenden Strahlen sei. Aus allen unseren Formeln ist aber er-

sichtlich, dafs wir ohne weiteres 0 mit 1 vertauschen können, wenn wir zugleich die von der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen abhängigen Vorzeichen ändern. Daraus geht also hervor, dafs der Punkt 0 zum Bildpunkt wird, wenn 1 der leuchtende Punkt ist. Man nennt daher beide auch conjugirte Vereinigungspunkte, wobei man es zweifelhaft läfst, von welchem der beiden Punkte das Licht ausgeht.

Für die Gültigkeit des Brechungsgesetzes ist es einerlei, ob der Licht aussendende Punkt ein materieller, Licht erzeugender oder auffallendes Licht zerstreuender Punkt sei oder nur der Vereinigungspunkt von gebrochenen Strahlen. Daher kann der leuchtende Punkt auch ein virtueller Vereinigungspunkt solcher Strahlen sein und in der Verlängerung der Strahlen hinter der brechenden Fläche liegen.

Bei unseren früheren Formeln (300) und (302a) für die Bildabstände bezogen wir alle Entfernungsabmessungen auf einen einzigen Punkt. In der Gleichung (300) war es der Scheitelpunkt der brechenden Fläche, in Gleichung (302a) ihr Krümmungsmittelpunkt. Wir wollen nunmehr auf jeder Seite der brechenden Fläche die Entfernungen von dem auf dieser Seite gelegenen Punkte eines Paares von conjugirten Vereinigungspunkten aus rechnen.

In Figur 36 sei AB die brechende Fläche, a ihr Scheitel, ϱ ihr Krümmungsradius; 0 sei der leuchtende Punkt, 1 der Bildpunkt,

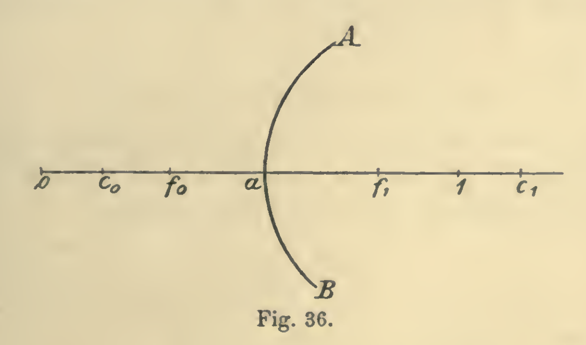


Fig. 36.

für welche beiden wir die Berechnung anstellen wollen. Die beiden conjugirten Vereinigungspunkte, von denen aus die Entfernungen zu rechnen sind, seien c_0 und c_1, ferner sei f_0 der vordere, f_1 der hintere Brennpunkt; die Brennweiten, vom Scheitel a aus gerechnet, seien $F_0 = a f_0$ und $F_1 = a f_1$. Die Entfernungen der Punkte 0 und 1 vom Scheitel a seien ebenso wie bisher mit r_0 und r_1, die der

conjugirten Punkte c_0 und c_1 mit r'_0 und r'_1 bezeichnet. Dann haben wir die Gleichungen

$$1 = \frac{F_0}{r_0} + \frac{F_1}{r_1} \tag{306}$$

und

$$1 = \frac{F_0}{r'_0} + \frac{F_1}{r'_1} \tag{307}$$

Für die neue Art der Entfernungsabmessung wollen wir nun die analoge Festsetzung über die Vorzeichen machen, wie sie für die alte galt, d. h. wir wollen die Entfernung h_0 des Punktes 0 von dem Punkte c_0 dann positiv rechnen, wenn 0 vor c_0 liegt, hingegen soll die Entfernung h_1 zwischen dem Punkte 1 und dem Punkte c_1 positiv sein, wenn 1 hinter c_1 liegt. Es ist dann

$$\left.\begin{aligned} h_0 &= r_0 - r'_0 \\ \text{und} \qquad h_1 &= r_1 - r_1' \end{aligned}\right\} \tag{308}$$

Setzen wir nun aus diesen Gleichungen die Werthe von r_0 und r_1 in Gleichung (306) ein, so ergiebt sich

$$1 = \frac{F_0}{r_0' + h_0} + \frac{F_1}{r_1' + h_1}$$

oder

$$(r_0' + h_0) \cdot (r_1' + h_1) = F_0 \cdot (r_1' + h_1) + F_1 \cdot (r_0' + h_0) \tag{309}$$

Subtrahirt man hiervon die aus Gleichung (307) abzuleitende Gleichung

$$r_0' \cdot r_1' = F_0 \cdot r_1' + F_1 \cdot r_0' \tag{307a}$$

so erhält man

$$h_1 \cdot (F_0 - r_0') + h_0 \cdot (F_1 - r_1') = h_0 h_1 \tag{310}$$

Die Brennweiten bezogen auf die conjugirten Vereinigungspunkte, also die Strecken $c_0 f_0$ und $c_1 f_1$, wollen wir mit H_0 und H_1 bezeichnen; dann ist nach den gemachten Festsetzungen

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= F_0 - r'_0 \\ H_1 &= F_1 - r'_1 \end{aligned}\right\} \tag{311}$$

Dadurch verwandelt sich Gleichung (310) in

$$h_1 \cdot H_0 + h_0 \cdot H_1 = h_0 \cdot h_1$$

oder

$$1 = \frac{H_0}{h_0} + \frac{H_1}{h_1} \tag{310a}$$

Wenn man also zum Ausgangspunkt für die Messung der Abstände irgend ein Paar conjugirte Vereinigungspunkte nimmt, so kommt

man zu derselben einfachen Formel, welche wir früher fanden, als die Messungen auf den Scheitelpunkt oder den Krümmungsmittelpunkt der Fläche bezogen wurden. Jene früher befolgte Art der Entfernungsabmessung ist aber nur ein specieller Fall der hier entwickelten; denn aus unseren beiden Gleichungen (300) und (302b)

$$1 = \frac{F_0}{r_0} + \frac{F_1}{r_1}$$

und

$$1 = \frac{F_0 + \varrho}{r_0 + \varrho} + \frac{F_1 - \varrho}{r_1 - \varrho}$$

ergiebt sich leicht, dafs sowohl der Scheitelpunkt wie auch der Krümmungsmittelpunkt der Fläche jeder sich selbst conjugirt sind. Setzen wir nämlich in der ersten dieser Gleichungen $r_0 = 0$, d. h. liegt der leuchtende Punkt im Scheitel der Fläche, so folgt $r_1 = 0$, d. h. der Bildpunkt liegt ebenfalls im Scheitel der Fläche. Liegt der leuchtende Punkt im Krümmungsmittelpunkt, ist also

$$r_0 = -\varrho$$

und demnach

$$r_0 + \varrho = 0$$

zu setzen, so ergiebt sich aus der zweiten Gleichung

$$r_1 - \varrho = 0$$

oder

$$r_1 = \varrho$$

Leuchtender Punkt und Bildpunkt fallen demnach auch hier zusammen.

§ 76. Die Gröfse der Bilder.

Wir wollen nunmehr die Gröfse der durch die Brechung entstehenden Bilder berechnen. Es sei AB in Figur 37 eine brechende Fläche mit dem Krümmungsradius ϱ. In Bezug auf den leuchtenden Punkt 0 ist dann die Axe des Systems diejenige Gerade, welche durch ihn und den Mittelpunkt der Kugel C geht, und auf ihr wird in dem durch die im vorigen Paragraphen entwickelten Gleichungen bestimmten Orte der Bildpunkt 1 liegen. Dieselben Verhältnisse bestehen aber auch für einen zweiten leuchtenden Punkt 0′, der in derselben Entfernung von der brechenden Fläche liegen möge. Von

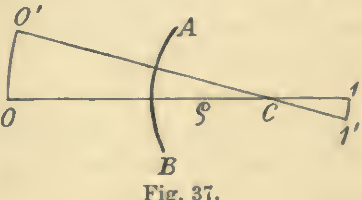


Fig. 37.

ihm würden wir eine andere Gerade nach dem Mittelpunkt zu ziehen haben, welche dann für diesen zweiten Punkt als Axe zu betrachten ist. Die Bedingung, die wir fest halten müssen, ist die, dafs der Theil der Fläche, welcher die Strahlen aufnimmt, stets nahezu senkrecht von den Strahlen getroffen wird. Das kann nun aber nur dann der Fall sein, wenn der zweite Punkt dem ersten nahe liegt, oder vielmehr, wenn die auf beide Punkte bezüglichen Axen nur wenig gegen einander geneigt sind. Die brechende Fläche darf ferner keinen zu grofsen Theil einer Kugel bilden, damit unsere oben abgeleiteten annähernd richtigen Sätze über die Vereinigung der Strahlen noch gültig bleiben. Wenn wir nun eine Reihe leuchtender Punkte haben, welche auf einem kleinen Stück einer Kugelfläche liegen, deren Krümmungsmittelpunkt mit dem Krümmungsmittelpunkt der brechenden Fläche zusammenfällt, so wird für jeden dieser Punkte das Bild in gleicher Entfernung hinter dem Krümmungsmittelpunkt liegen, weil für jedes dieser Strahlenbündel dieselben Verhältnisse bestehen. Es befinden sich also die Bildpunkte aller dieser leuchtenden Punkte wiederum auf einem kleinen Stück einer Kugelfläche, und die Lage jedes einzelnen wird erhalten, wenn man den leuchtenden Punkt durch den Krümmungsmittelpunkt der Kugel hindurch auf die Kugelfläche der Bildpunkte projicirt. Dadurch entsteht eine geometrisch ähnliche Abbildung der leuchtenden Fläche, welch letztere neben den beliebig gefärbten leuchtenden Punkten freilich auch dunkle Punkte enthalten kann. Für ein Auge, welches diese Bildfläche von hinten betrachtet, wird alles Licht, welches von der brechenden Fläche kommt, scheinbar von den Vereinigungspunkten, die in der Bildfläche liegen, ausgehen. Wenn wir ein weifses Papier in die Bildfläche halten, so wird jeder Punkt, der von einem hellen Punkte des Originals beleuchtet wird, hell erscheinen; einem rothen Punkte des Originals entspricht ein rother Punkt auf der Bildfläche, einem grünen ein grüner u. s. w., so dafs man ein in Farbe und geometrischer Vertheilung völlig ähnliches optisches Bild auffangen kann, wie wir das in der That in der Camera obscura sehen.

Nun kann ein Stück einer Kugelfläche, welches eine im Verhältnifs zum Radius kleine Ausdehnung hat, immer als eben betrachtet werden, und in diesem Sinne können wir uns die vereinfachte Vorstellung erlauben, dafs die leuchtenden Punkte statt in einer Kugelfläche, in einer ebenen Fläche liegen, und dafs dieses auch bei ihren Bildern der Fall ist. Liegen die leuchtenden Punkte auf einer Ebene, die senkrecht auf der zu einem dieser Punkte

gehörigen Axe des Systems steht, so steht die Bildebene ebenfalls senkrecht auf dieser Axe und befindet sich, auf dieser Axe gemessen, in einer Entfernung, die durch die Regeln über die Vereinigungsweiten gegeben ist.

Ein reelles Bild, welches in dieser Weise durch eine brechende Fläche entworfen wird, die ihre convexe Seite nach vorne kehrt und hinter welcher sich ein dichteres Medium befindet, wird nun umgekehrt sein. Denn für jeden Objectpunkt ist, auf der zugehörigen Axe gemessen, der Bildpunkt von der brechenden Fläche weiter entfernt, als der Krümmungsmittelpunkt; da sich nun in letzterem alle Axenstrahlen schneiden, so ist (siehe Figur 37) die verticale Anordnung der Bildpunkte die umgekehrte von derjenigen der Objectpunkte.

Nehmen wir nun an, dafs die Objectebene und damit auch die Bildebene auf der Axe 0 1 senkrecht steht, so sind die beiden Dreiecke $0\,0'C$ und $1\,1'C$ einander ähnlich, da die bei C liegenden Winkel als Scheitelwinkel gleich sind, und daraus folgt, dafs die Gröfse des Bildes sich zu der Gröfse des Objectes, beide gemessen zwischen zwei einander entsprechenden Punktpaaren, verhält wie die Entfernung des Bildes vom Krümmungsmittelpunkt zu derjenigen des Objects. Wenn wir die Objectgröfse mit β_0 und die Bildgröfse mit β_1 bezeichnen, so haben wir also die Proportion

$$\beta_0 : r_0 + \varrho = \beta_1 : r_1 - \varrho \tag{312}$$

und daraus ergiebt sich

$$\frac{\beta_0}{r_0 + \varrho} = \frac{\beta_1}{r_1 - \varrho} \tag{312a}$$

Man pflegt nun gewöhnlich die Gröfse umgekehrter Bilder als negativ zu bezeichnen, so dafs wir, um die Gleichung in diesem Sinne vollständig zu machen, auf der einen Seite ein negatives Zeichen hinzu setzen müssen. Dann erhalten wir:

$$-\frac{\beta_0}{r_0 + \varrho} = \frac{\beta_1}{r_1 - \varrho} \tag{313}$$

oder

$$-\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{r_0 + \varrho}{r_1 - \varrho} \tag{313a}$$

Multipliciren wir beide Seiten mit $\frac{F_0}{F_1}$, so ergiebt sich:

$$-\frac{\beta_0\, F_0}{\beta_1\, F_1} = \frac{(r_0 + \varrho)\cdot F_0}{F_1 \cdot (r_1 - \varrho)}$$

oder

$$-\frac{\beta_0 F_0}{\beta_0 F_0 + \beta_1 F_1} = \frac{(r_0 + \varrho) \cdot F_0}{(r_0 + \varrho) \cdot F_0 + (r_1 - \varrho) \cdot F_1} \tag{313b}$$

Und da nach Gleichung (302)

$$(r_0 + \varrho) \cdot F_0 + (r_1 - \varrho) \cdot F_1 = (r_0 + \varrho) \cdot (r_1 - \varrho)$$

ist, so folgt:

$$-\frac{F_0 \beta_0}{F_0 \beta_0 + F_1 \beta_1} = \frac{(r_0 + \varrho) \cdot F_0}{(r_0 + \varrho) \cdot (r_1 - \varrho)}$$

$$= \frac{F_0}{r_1 - \varrho} \tag{313c}$$

Wenn wir durch F_0 auf der linken Seite Zähler und Nenner dividiren, so erhalten wir

$$-\frac{\beta_0}{\beta_0 + \frac{F_1}{F_0} \cdot \beta_1} = \frac{F_0}{r_1 - \varrho} \tag{313d}$$

Da nun nach Gleichung (299)

$$\frac{F_1}{F_0} = \frac{n_1}{n_0}$$

ist, und nach den Gleichungen (298)

$$F_0 = \frac{\varrho \cdot n_0}{n_1 - n_0}$$

so ergiebt sich nach einiger Umformung

$$-\frac{\beta_0}{n_0 \beta_0 + n_1 \beta_1} = \frac{\varrho}{(n_1 - n_0) \cdot (r_1 - \varrho)} \tag{313e}$$

Daraus können wir — allerdings nicht in wünschenswerther Einfachheit — die Bildgröfse β_1 berechnen, wenn die Brechungsverhältnisse n_1 und n_0, der Krümmungsradius ϱ, der Objectabstand r_1 und die Objectgröfse β_0 gegeben sind.

Eine viel einfachere und übersichtlichere Formel ist abzuleiten, wenn wir das in der früheren Gleichung (303b)

$$x_0 \cdot x_1 = F_0 \cdot F_1$$

enthaltene, auf den Abstand von den Brennpunkten bezügliche Gesetz benutzen. Wir wissen, dafs ein jeder Strahl, der durch den Brennpunkt geht, nach der Brechung der Axe parallel wird. Wenn wir also von dem Punkte 0′, der seitlich von der zum Punkte 0 gehörigen Axe angenommen wird, eine Gerade durch den vorderen Brennpunkt nach der brechenden Fläche ziehen, so wird der Strahl

so gebrochen, dafs er parallel der Axe weiter geht. Nun ist dieser Strahl aber ein Strahl, welcher einem Objectpunkt angehört, dessen Entfernung von der Axe mit β_0 bezeichnet wurde, und seine Fortsetzung nach der Brechung mufs also auch, da wir schon wissen, dafs die Strahlen, die von einem und demselben leuchtenden Punkte ausgegangen sind, nach der Brechung sich sämmtlich wieder in einem Punkte, dem Bilde des leuchtenden Punktes, vereinigen, dem Bilde des Punktes 0′ angehören. Wir wissen nun zunächst noch nicht, wo dieses Bild hinfällt; aber seine Gröfse β_1 mufs dem Ab-

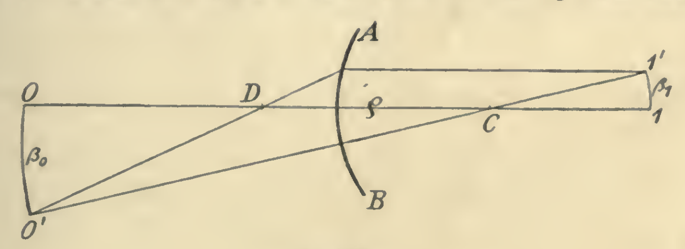


Fig. 38.

stand gleich sein, in dem dieser Strahl nach der Brechung der Axe parallel verläuft. Die Entfernung des Punktes 0 vom vorderen Brennpunkte haben wir früher mit x_0 bezeichnet; die vordere Brennweite F_0 ist aber die Entfernung des vorderen Brennpunktes von der brechenden Fläche, von der nur ein kleines, sehr wenig gekrümmtes Stück hier in Betracht kommt, und die wir daher hier als eine Ebene betrachten können. Es folgt daraus, wenn wir β_1 wieder als negativ rechnen, weil das Bild umgekehrt ist:

$$-\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{x_0}{F_0} \tag{314}$$

Wir können nun eine ähnliche Betrachtung auch für einen Strahl machen, welcher durch den hinteren Brennpunkt geht, nachdem er vor der Brechung der Axe parallel gelaufen ist. Einfacher aber ist es, die aus Gleichung (303b) abzuleitende Beziehung

$$\frac{x_0}{F_0} = \frac{F_1}{x_1}$$

zu benutzen; denn dann ergiebt sich sofort die Doppelgleichung

$$-\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{x_0}{F_0} = \frac{F_1}{x_1} \tag{315}$$

Wir können demnach die Bildgröfse aus der Objectgröfse berechnen, sobald wir die Entfernung des leuchtenden Punktes vom ersten

Brennpunkt, oder des Bildpunktes vom zweiten Brennpunkt, und die entsprechende Brennweite kennen. Nach den Gleichungen (303) ist nun aber

$$x_0 = r_0 - F_0$$

und

$$x_1 = r_1 - F_1$$

Setzen wir diese Werthe in unsere Doppelgleichung (315) ein, so erhalten wir

$$\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{F_0 - r_0}{F_0} = \frac{F_1}{F_1 - r_1} \tag{315a}$$

womit eine weitere einfache Beziehung der Bildgröfsen gegeben ist.

§ 77. Die optische Divergenz der Strahlen.

Von dem leuchtenden Punkte 0 (Figur 39) fallen Strahlen auf die brechende Fläche AB. Den benutzten Theil dieser Fläche wollen wir uns durch eine kreisförmige Oeffnung begrenzt denken, die sich in irgend einem zur Axe senkrechten dunkeln Schirme be-

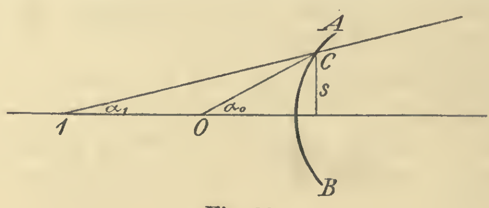


Fig. 39.

findet und deren Mittelpunkt in der Axe liegt. Es möge $0\,C$ ein dicht an dem Rande dieser Oeffnung vorbeigehender Strahl sein. Die Entfernung von der Axe, in welcher dieser Randstrahl auf die brechende Fläche trifft, sei mit s bezeichnet. Um den Sinn der nachher zu brauchenden Ausdrücke positiv zu machen, wollen wir in unserem Beispiel annehmen, dafs der Strahl auch nach der Brechung mit der Axe divergirt. In diesem Falle werden wir einen virtuellen Vereinigungspunkt der Strahlen haben, der auf derselben Seite der brechenden Fläche wie der leuchtende Punkt liegt, und es ist dann r_1 negativ. Der Strahl bilde vor der Brechung mit der Axe den Winkel α_0, nach der Brechung den Winkel α_1, und zwar wollen wir diese Winkel stets als positiv rechnen, wenn ihre spitze Oeffnung nach der Seite hin gewendet ist, nach der sich die Strahlen

fortpflanzen, als negativ, wenn die spitze Oeffnung nach der entgegengesetzten Seite gerichtet ist. Dann ist also

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{s}{r_0} \tag{316}$$

und

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = -\frac{s}{r_1} \tag{317}$$

In § 72 haben wir für die Beziehung zwischen den Brechungsverhältnissen, den Object- und Bildabständen, sowie dem Krümmungsradius die Gleichung (297)

$$\frac{n_0}{r_0} + \frac{n_1}{r_1} = \frac{n_1 - n_0}{\varrho}$$

abgeleitet. Multipliciren wir beide Seiten dieser Gleichung mit s und setzen aus den Gleichungen (316) und (317) die Werthe $\operatorname{tg} \alpha_0$ und $\operatorname{tg} \alpha_1$ für die betreffenden Quotienten ein, so erhalten wir:

$$n_0 . \operatorname{tg} \alpha_0 - n_1 . \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{s}{\varrho} \cdot (n_1 - n_0) \tag{318}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird gebildet von einer Gröfse, welche von der Lage des Objectes und des Bildes unabhängig ist und allein durch die Beschaffenheit des Systems und die Gröfse seiner Oeffnung bestimmt wird. Der Quotient $\frac{s}{\varrho}$ ist die Tangente des Winkels, den eine von dem Krümmungsmittelpunkt der Fläche nach dem Rande der Schirmöffnung gezogene Gerade mit der Axe bildet. Diesen Winkel nennt man den Oeffnungswinkel. Die Winkel α_0 und α_1 auf der linken Seite geben die Divergenzwinkel an, welche die Randstrahlen mit der Axe bilden.

Bezeichnen wir den Oeffnungswinkel mit ω, so können wir die letzte Gleichung schreiben

$$n_0 . \operatorname{tg} \alpha_0 - n_1 . \operatorname{tg} \alpha_1 = (n_1 - n_0) . \operatorname{tg} \omega \tag{318a}$$

Da nach unserer Voraussetzung diese Winkel klein sein müssen, so kann man ihre Tangenten den Winkeln selbst gleich setzen, so dafs unter dieser Voraussetzung

$$n_0 . \alpha_0 - n_1 . \alpha_1 = (n_1 - n_0) . \omega \tag{319}$$

Das Product aus der Tangente bez. dem Winkel und dem Brechungsverhältnifs wird die optische Divergenz der Strahlen genannt.

Sind die Strahlen convergent gegen die Axe gerichtet, so wollen wir von einer negativen Divergenz reden. Es hat dann unserer

Festsetzung gemäſs ja auch α_0 bez. α_1 einen negativen Werth. Diese optische Divergenz der Strahlen, welche auf die Fläche fallen, ist abhängig von der Entfernung des leuchtenden Punktes von der Fläche, aber die Aenderung, welche sie beim Durchgang durch dieselbe brechende Fläche erleidet, ist stets dieselbe, aus welcher Entfernung die Strahlen auch kommen mögen. Man pflegt nun solche brechenden Flächen, welche die optische Divergenz verringern, sammelnde brechende Flächen zu nennen, und diejenigen, welche die Divergenz vergröſsern, zerstreuende brechende Flächen. Die Gröſse der Verminderung bez. der Vermehrung der optischen Divergenz hängt, wie unsere Gleichung (318) zeigt, wenn wir den Radius s der Oeffnung als constant annehmen, sowohl von dem Unterschiede der beiden Brechungsverhältnisse, als auch von der Gröſse des Krümmungsradius ϱ ab. Liegt hinter der brechenden Fläche das stärker brechende Medium, ist also $n_1 > n_0$, und ist der Krümmungsradius positiv, d. h. wendet die brechende Fläche ihre convexe Seite den auffallenden Strahlen zu, so wird die optische Divergenz beim Durchgang verringert. Dasselbe ist der Fall, wenn $n_1 < n_0$ und die concave Seite den ankommenden Strahlen zugekehrt ist. Bei sammelnden brechenden Flächen liegt also stets das stärker brechende Medium auf der concaven Seite, und umgekehrt liegt bei zerstreuenden brechenden Flächen das stärker brechende Medium auf der convexen Seite. Wir haben früher in § 74 gesehen, daſs wir die Spiegelung als Brechung auffassen können, indem wir $n_1 = -n_0$ setzen, und daher lassen sich die zuletzt entwickelten Beziehungen

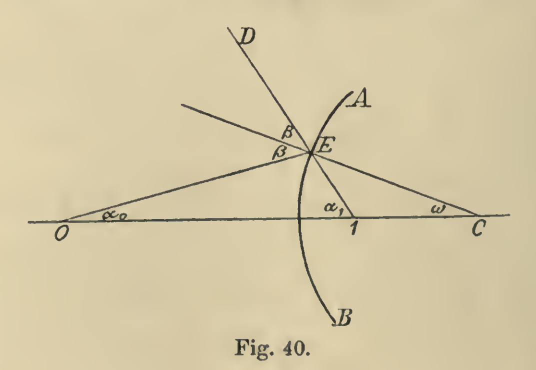


Fig. 40.

auch auf spiegelnde Flächen anwenden. Es ergiebt sich dabei sogar, daſs wir uns nicht einmal auf denjenigen Theil der spiegelnden kugeligen Fläche zu beschränken haben, welcher der Axe nahe liegt. Es sei AB (Fig. 40) eine spiegelnde Kugelfläche, C ihr Mittelpunkt.

Von dem leuchtenden Punkte 0 falle der Strahl $0E$, der mit der Axe $0C$ den Divergenzwinkel α_0 bildet, auf die convexe Seite der Fläche. Der zu diesem Strahl gehörige Oeffnungswinkel ist $EC0 = \omega$. Nach dem Spiegelungsgesetze können wir dann den Bildpunkt 1 construiren. Die von ihm virtuell ausgehenden Strahlen bilden mit der Axe den Divergenzwinkel α_1. Es ist nun

$$\alpha_0 = \beta - \omega$$

und

$$\alpha_1 = \omega + \beta$$

Daraus folgt:

$$\alpha_1 - \alpha_0 = 2\omega \tag{320}$$

Durch die Spiegelung ist demnach die Divergenz der Strahlen um 2ω vermehrt worden. Diese Vermehrung der Divergenz ist, wie ersichtlich, nicht abhängig von der Entfernung, in der der leuchtende Punkt 0 von der Fläche AB liegt.

Käme das Licht von D her, d. h. wäre 1 der virtuelle leuchtende Punkt, so würde 0 der Bildpunkt sein; es würde dann $-\alpha_1$ die Divergenz vor der Brechung und $-\alpha_0$ die Divergenz nach der Brechung sein. Da nun α_0 seinem absoluten Betrage nach kleiner als α_1 ist, so hätte sich auch hier die Divergenz durch die Brechung vermehrt.

Fallen die von dem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen auf die concave Seite einer spiegelnden Kugelfläche, so ergiebt eine völlig analoge Betrachtung, dafs die Divergenz der Strahlen um den Betrag 2ω verringert wird.

Concavspiegel vermindern also die Divergenz der Strahlen um den doppelten Betrag des Oeffnungswinkels, Convexspiegel vermehren sie um ebensoviel. Jene heifsen deshalb auch Sammelspiegel, diese Zerstreuungsspiegel.

§ 78. Die Beziehung zwischen der optischen Divergenz der Strahlen und der Bildgröfse.

Aus unserer Doppelgleichung (315) ergiebt sich:

$$-\frac{\beta_0}{x_0} = \frac{\beta_1}{F_0} \tag{321}$$

und wenn wir diese Gleichung mit der aus unseren Gleichungen (303) folgenden Gleichung

$$\frac{1}{x_1 + F_1} = \frac{1}{r_1}$$

multipliciren, erhalten wir

$$-\frac{\beta_0}{x_0(x_1+F_1)} = \frac{\beta_1}{F_0 \cdot r_1}$$

oder

$$-\frac{\beta_0}{x_0 x_1 + x_0 F_1} = \frac{\beta_1}{F_0 \cdot r_1} \tag{321 a}$$

Setzen wir nun nach Gleichung (303b)

$$x_0 \cdot x_1 = F_0 \cdot F_1$$

in den Nenner auf der linken Seite ein und berücksichtigen, daſs nach den Gleichungen (303)

$$F_0 + x_0 = r_0$$

ist, dann erhalten wir

$$-\frac{\beta_0}{F_1 \cdot r_0} = \frac{\beta_1}{F_0 \cdot r_1}$$

Nun wissen wir aber nach Gleichung (299), daſs

$$F_1 \cdot n_0 = F_0 \cdot n_1$$

ist. Werden die beiden letzten Gleichungen mit einander multiplicirt, so ergiebt sich

$$-\frac{\beta_0 \cdot n_0}{r_0} = \frac{\beta_1 \cdot n_1}{r_1}$$

oder, wenn wir mit dem Radius der Oeffnung, s, multipliciren

$$-\beta_0 \cdot n_0 \cdot \frac{s}{r_0} = \beta_1 \cdot n_1 \cdot \frac{s}{r_1} \tag{321 b}$$

Nun ist aber $\frac{s}{r_0}$ die Tangente des Winkels, den wir im vorigen Paragraphen mit α_0 bezeichnet hatten, und analog ist $\frac{s}{r_1}$ die Tangente des Winkels, den der weiter gehende Strahl mit der Axe macht, und zwar ist nach den gemachten Festsetzungen dieser Winkel mit $-\alpha_1$ zu bezeichnen, da die offene Seite des spitzen Winkels der Fortpflanzungsrichtung der Strahlen entgegen gerichtet ist. Wir haben also

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{s}{r_0}$$

und

$$-\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{s}{r_1}$$

und erhalten demnach:

$$\beta_0 \cdot n_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 = \beta_1 \cdot n_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 \tag{321c}$$

wofür wir bei sehr kleinen Divergenzwinkeln auch

$$\beta_0 \cdot n_0 \cdot \alpha_0 = \beta_1 \cdot n_1 \cdot \alpha_1 \tag{321d}$$

schreiben können. In diesen Gleichungen bezeichnen die Producte $n_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0$ bez. $n_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$ oder $n_0 \cdot \alpha_0$ bez. $n_1 \cdot \alpha_1$ das, was wir oben die optische Divergenz der Strahlen genannt haben. Das Product aus Bildgröfse und der optischen Divergenz ist also unverändert. Es geht daraus hervor, dafs die Gröfse des Bildes negativ, d. h. die Lage des Bildes umgekehrt wird, wenn die optische Divergenz negativ wird.

§ 79. Brechung und Spiegelung an einer ebenen Fläche.

Jede ebene Fläche können wir als eine Kugelfläche mit unendlich grofsem Radius auffassen. Wir brauchen demnach in unseren bisher abgeleiteten Formeln nur $\varrho = \infty$ zu setzen, um sie auf ebene Flächen zu beziehen. Für die Brennweiten ergab sich nach den Gleichungen (298)

$$F_0 = \frac{\varrho \cdot n_0}{n_1 - n_0}$$

und

$$F_1 = \frac{\varrho \cdot n_1}{n_1 - n_0}$$

Daher erhalten wir hier:

$$F_0 = F_1 = \infty \tag{322}$$

Die Lage des Bildpunktes war gegeben durch die Gleichung (297)

$$\frac{n_1 - n_0}{\varrho} = \frac{n_0}{r_0} + \frac{n_1}{r_1}$$

Für eine ebene Fläche ergiebt sich demnach

$$0 = \frac{n_0}{r_0} + \frac{n_1}{r_1}$$

woraus

$$r_1 = -\frac{n_1}{n_0} \cdot r_0 \tag{323}$$

folgt. Der Bildpunkt liegt demnach, wenn n_1 positiven Werth hat, d. h. also, eine wirkliche Brechung stattfindet, auf derselben Seite,

wie der leuchtende Punkt, aber in einer andern Entfernung von der brechenden Fläche. Für den Fall einer Spiegelung, wo also

$$n_1 = - n_0$$

ist, wird

$$r_1 = r_0 \tag{324}$$

Der Bildpunkt liegt dann auf der anderen Seite, aber in der gleichen Entfernung von der spiegelnden Fläche. Für die Bildgröfse fanden wir oben (§ 76) die Gleichung (313a)

$$-\frac{\beta_0}{\beta_1} = \frac{r_0 + \varrho}{r_1 - \varrho}$$

Dividirt man auf der rechten Seite Zähler und Nenner durch ϱ und setzt dann $\varrho = \infty$, so ergiebt sich

$$\frac{\beta_0}{\beta_1} = 1 \tag{325}$$

d. h. sowohl bei einer brechenden als auch bei einer spiegelnden ebenen Fläche ist das Bild aufrecht und hat dieselbe Gröfse wie das Object.

Auch die optische Divergenz der Strahlen wird bei brechenden und spiegelnden Ebenen nicht verändert; denn es ist der Winkel, dessen doppelter Werth nach Gleichung (320) den Betrag der Aenderung der optischen Divergenz angiebt, gleich Null, da er den hier in unendlicher Ferne liegenden Krümmungsmittelpunkt zum Scheitel hat.

Dritter Abschnitt.

Die Brechung in Systemen centrirter Flächen.

---

§ 80. Allgemeine Eigenschaften centrirter brechender Flächen. Die conjugirten Vereinigungspunkte und die beiden Brennpunkte.

Die bisher gefundenen Sätze lassen sich auf ein zusammengesetztes optisches System übertragen, welches aus einer beliebigen Anzahl von kugeligen brechenden Flächen besteht, deren Krümmungsmittelpunkte alle in einer geraden Linie, der Axe des Systems,

liegen. Ein solches optisches System nennt man ein centrirtes System brechender Flächen. Nach den in § 74 gegebenen Ausführungen können auch noch spiegelnde Kugelflächen hinzukommen, die dann natürlich ebenfalls in dem oben dargestellten Sinne centrirt sein müssen. Durch diese Uebertragung der Gleichungen auf beliebig zusammengesetzte Systeme erhalten wir allgemeine Regeln über die Lage und Gröfse der Bilder in allen möglichen Arten von optischen Instrumenten, bei denen die brechenden und spiegelnden Flächen centrirt sind. Zu ihnen gehören sowohl Fernrohre wie Mikroskope.

Es ist dabei aber zu beachten, dafs unsere Regeln nur dann gültig bleiben, wenn die Strahlen auf sämmtliche brechende Flächen des Systems stets unter kleinen Einfallswinkeln auffallen. Wenn auf einer kleinen, zur Axe senkrechten Ebene eine Anzahl von leuchtenden Punkten liegt, so wird die erste brechende Fläche eines centrirten optischen Systems ein geometrisch ähnliches Bild jener Ebene an einer andern Stelle des Systems entwerfen, welches ebenfalls senkrecht zur Axe ist. Dabei wird das Strahlenbündel, welches von jedem Objectpunkt der ersten Fläche ausgeht, mit allen seinen Strahlen, soweit sie durch die Fläche hindurch gehen und insofern die Apertur der krummen Fläche nicht zu grofs ist, wieder in einem Punkte vereinigt. Man nennt solche Strahlenbündel, deren Strahlen von einem leuchtenden Punkte ausgehen, oder, wenn sie weiter gehen, sich alle wieder in einem Punkte vereinigen, homocentrisch. Sie bilden den Gegensatz zu den astigmatischen Strahlenbündeln, von denen wir oben in § 69 schon gesprochen haben, als sich zeigte, dafs die Strahlenbündel, die von einem Punkte ausgehen, sich nicht unter allen Umständen wieder in einem Punkte vereinigen. Da homocentrisches Licht, welches unter kleinem Einfallswinkel auf eine kugelige brechende Fläche fällt, auch nach der Brechung homocentrisch ist, und da dasselbe für jede der brechenden Kugelflächen gilt, welche in dem System aufeinander folgen, so wird solches homocentrische Licht auch nach der Brechung an einer langen Reihe von solchen Kugelflächen homocentrisch bleiben müssen, falls nur auf dem ganzen Wege keine zu grofsen Einfallswinkel vorkommen.

Von einem ebenen Objecte, welches senkrecht zur Axe liegt, entsteht nach der Brechung in einer Kugelfläche ein geometrisch ähnliches Abbild, welches ebenfalls senkrecht zur Axe liegt. In ihm werden wiederum die homocentrisch von dem Object ausgehenden Strahlen homocentrisch vereinigt; dieses Bild des ersten Objects

ist nun das Object für die zweite brechende Fläche; hier gilt dasselbe, und ebenso für die dritte, vierte, und jede weitere Fläche, so dafs also schliefslich nach der Brechung in der letzten Fläche an irgend einer Stelle ein Abbild von jenem ebenen Object existiren mufs, welches diesem ähnlich ist und in eine zur Axe senkrechte Ebene fällt.

Zu jedem leuchtenden Punkte, der auf der Axe des Systems liegt, wird also, nachdem die von ihm ausgehenden Strahlen sämmtliche brechenden — und auch spiegelnden — Flächen passirt haben, ein Bildpunkt gehören, in dem sich diese Strahlen wieder schneiden, resp. von dem sie herzukommen scheinen. Auf Grund derselben Betrachtungen, die wir in § 75 für eine einzige Fläche angestellt haben, ergiebt sich nun auch für ein System von Flächen, dafs wir den leuchtenden Punkt und den Bildpunkt mit einander vertauschen können. Ein solches Punktpaar, das wechselseitig Object- und Bildpunkt ist, nennt man nun auch bei einem System von brechenden Flächen conjugirte oder zusammengehörige Vereinigungspunkte.

Liegt einer der conjugirten Vereinigungspunkte im Unendlichen, so wird der andere ein Brennpunkt des Systems genannt. Ebenso, wie bei einer einzelnen brechenden Fläche giebt es auch hier zwei Brennpunkte. Liegt der leuchtende Punkt im Unendlichen, sind also die auffallenden Strahlen parallel, so nennt man den zugehörigen Bildpunkt den zweiten oder hinteren Brennpunkt des Systems. Sind hingegen die Strahlen parallel, nachdem sie das ganze System passirt haben, d. h. liegt der Bildpunkt im Unendlichen, so nennt man den Punkt, von dem sie ursprünglich ausgingen, bez. auszugehen schienen, den ersten oder vorderen Brennpunkt des Systems.

Ebenen, welche senkrecht zur Axe durch die beiden Brennpunkte gelegt sind, heifsen die Brennebenen.

Da das Bild jedes Brennpunktes in unendlicher Entfernung liegt, so mufs dasselbe auch für solche Punkte der Brennebenen der Fall sein, deren Entfernung von der Axe so klein ist, dafs wir sie gegenüber den sonstigen Dimensionen des Systems vernachlässigen können. Strahlen, die von einem solchen Punkte der Brennebene ausgehen, werden also nach der Brechung unter einander parallel sein.

§ 81. Die Lage conjugirter Vereinigungspunkte.

Ein centrirtes System bestehe aus m brechenden Flächen. Alle Gröfsen, welche sich auf den Strahlengang beziehen, nachdem eine, zwei u. s. w. bis m Flächen passirt sind, wollen wir

durch die Indices 1 bis m von einander unterscheiden. Diese m Flächen trennen $m + 1$ brechende Medien von einander, und diesen wollen wir die Indices 0 bis m beilegen, so dafs also das hinter der $r$ten Fläche gelegene Medium das Brechungsverhältniss n_r besitzt. In Figur 41 sind die erste, $(m-1)$te und $m$te brechende Fläche

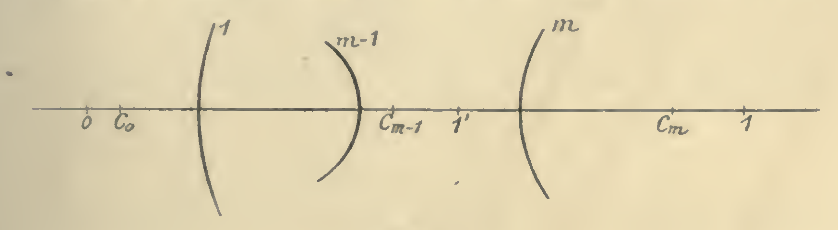


Fig. 41.

eingezeichnet. Es seien C_0 und C_m zwei conjugirte Vereinigungspunkte des Systems, 0 ein leuchtender Punkt, 1 sein Bildpunkt. Indem wir die Lage von 0 bez. 1 auf C_0 und C_m beziehen, bezeichnen wir $0\,C_0$ mit h_0 und $C_m\,1$ mit h_m. Nennen wir dann noch H_0 den Abstand des ersten Brennpunktes von C_0 und H_m den des zweiten Brennpunktes von C_m, so ist:

$$\frac{H_0}{h_0} + \frac{H_m}{h_m} = 1\,, \tag{325}$$

wofür wir den Beweis antreten wollen, indem wir zunächst voraussetzen, dafs eine dieser Gleichung analoge Gleichung bereits für ein aus den ersten $m-1$ brechenden Flächen zusammengesetztes System bewiesen sei. Für dieses System sei C_{m-1} der zu C_0 conjugirte Vereinigungspunkt und 1′ der Bildpunkt zu 0. Die Entfernung zwischen C_0 und dem ersten Brennpunkt dieses Systems sei mit L_0, die Entfernung zwischen C_{m-1} und dem zweiten Brennpunkt mit L_{m-1}, und endlich gemäfs unserer Festsetzung die Strecke $C_{m-1}\,1'$ mit h_{m-1} bezeichnet. Die Entfernungen der Brennpunkte der letzten, $m$ten Fläche von den Punkten C_{m-1} und C_m seien M_{m-1} und M_m.

Nun haben wir nach der gemachten Voraussetzung:

$$\frac{L_0}{h_0} + \frac{L_{m-1}}{h_{m-1}} = 1 \tag{326}$$

und für die Brechung in der $m$ten Fläche

$$-\frac{M_{m-1}}{h_{m-1}} + \frac{M_m}{h_m} = 1 \tag{327}$$

Das negative Zeichen des ersten Gliedes rührt daher, dafs wir die

Strecke h_{m-1} in diesem System in umgekehrtem Sinne als positiv zu rechnen haben, wie in dem andern System. Wenn wir die Gleichung (326) durch L_{m-1} und die Gleichung (327) durch M_{m-1} dividiren und beide addiren, so erhalten wir:

$$\frac{L_0}{L_{m-1}} \cdot \frac{1}{h_0} + \frac{M_m}{M_{m-1}} \cdot \frac{1}{h_m} = \frac{1}{L_{m-1}} + \frac{1}{M_{m-1}} \tag{328}$$

oder, indem wir mit $\frac{L_{m-1} \cdot M_{m-1}}{L_{m-1} + M_{m-1}}$ multipliciren:

$$\frac{L_0 \cdot M_{m-1}}{L_{m-1} + M_{m-1}} \cdot \frac{1}{h_0} + \frac{L_{m-1} \cdot M_m}{L_{m-1} + M_{m-1}} \cdot \frac{1}{h_m} = 1 \tag{328a}$$

Für $h_0 = \infty$ wird $h_m = H_m$; daher folgt aus der letzten Gleichung

$$H_m = \frac{L_{m-1} \cdot M_m}{L_{m-1} + M_{m-1}} \tag{329}$$

Für $h_m = \infty$ wird andererseits $h_0 = H_0$, und wir erhalten ebenfalls aus Gleichung (328a)

$$H_0 = \frac{L_0 \cdot M_{m-1}}{L_{m-1} + M_{m-1}} \tag{330}$$

Setzt man diese beiden Werthe nun in Gleichung (328a) ein, so erhält dieselbe die Gestalt

$$\frac{H_0}{h_0} + \frac{H_m}{h_m} = 1 \tag{328b}$$

Damit ist aber nachgewiesen, dafs diese Gleichung für m brechende Flächen gültig ist, falls sie für $m - 1$ Flächen gilt. Nun haben wir aber bereits in § 75 gezeigt, dafs eine solche Gleichung für eine brechende Fläche gilt, sie gilt also auch für zwei; wenn sie nun für zwei gilt, so gilt sie auch für drei u. s. w. in infinitum. Sie ist somit allgemein gültig.

Diese Gleichung (328b) liefert für jeden reellen Werth von h_0 zwischen $+\infty$ und $-\infty$ einen, und nur einen reellen Werth von h_m und umgekehrt. Der leuchtende Punkt sowie der Bildpunkt können an jeder Stelle der Axe liegen, aber sobald einer von beiden gegeben ist, ist auch die Lage des anderen eindeutig bestimmt.

§ 82. Die Hauptpunkte und Hauptebenen.

Ein centrirtes brechendes System aus m Flächen sei in Figur 42 durch die beiden Flächen 1 1 und $m\,m$ dargestellt; sp sei ein durch dasselbe abgebildeter Gegenstand, von welchem der Punkt p in der Axe und der Punkt s in einer durch p gehenden zur Axe senk-

rechten Ebene liege. Wenn wir den Gegenstand parallel mit sich selbst längs der Axe verschieben, so wird sich der Punkt *s* auf der mit der Axe parallelen Geraden *st* bewegen. Der Lichtstrahl *st* wird also stets dem Punkte *s* angehören, welches auch die Entfernung *pq* sein möge. Die der Axe parallelen Strahlen werden nun durch das brechende System so gebrochen, dafs sie schliefslich durch den zweiten Brennpunkt P_2 des Systems gehen. Es sei *rw* der Gang des Lichtstrahls *st* nach der letzten Brechung. Da *st*

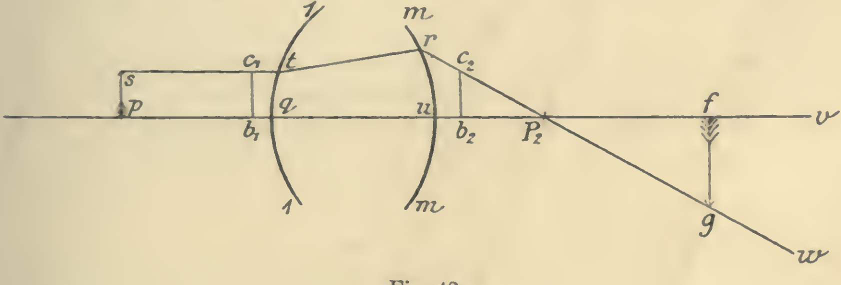


Fig. 42.

stets dem leuchtenden Punkte *s* angehört, mufs *rw* stets dem Bilde dieses Punktes angehören, d. h. das Bild von *s* mufs auf der Geraden *rw* liegen. Es sei *fg* das Bild von *sp*, welches nach § 80 senkrecht gegen die Axe *uv* sein mufs. Wenn *p* sich längs der Axe verschiebt, wird sich auch *f* längs *uv* und *g* längs *rw* verschieben, und es ist ersichtlich, dafs die Gröfse des Bildes *fg* sich hierbei proportional dem Abstande $P_2 f$ ändern mufs. Da nun aus der Darlegung im vorigen Paragraphen hervorging, dafs das Bild an jeder Stelle der Axe liegen kann, also die Entfernung $P_2 f$ jeden beliebigen Werth zwischen $+\infty$ und $-\infty$ annehmen kann, falls wir nur das Object an die erforderliche Stelle bringen, so wird auch die Gröfse des Bildes, wenn wir ein umgekehrtes Bild als negativ bezeichnen, jeden zwischen diesen Grenzen liegenden Werth und einen jeden nur einmal annehmen können. Das Bild wird also dem Gegenstande an einer und zwar nur an einer Stelle gleich werden müssen. Es sei dieses der Fall, wenn der Bildpunkt in b_2 liegt. Wir wollen annehmen, dafs dazu das Object *sp* so verschoben werden müsse, dafs *p* in b_1 zu liegen kommt. Man bezeichnet dann b_1 als den ersten Hauptpunkt und b_2 als den zweiten Hauptpunkt des Systems, und die beiden durch diese Punkte gelegten zur Axe senkrechten Ebenen als die erste bez. zweite Hauptebene des Systems.

Die Hauptpunkte sind also zu definiren als dasjenige Paar conjugirter Vereinigungspunkte, in denen die Gröfse eines auf der Axe senkrechten Bildes der des zugehörigen Gegenstandes gleich ist.

§ 83. Die beiden Hauptbrennweiten und die Lage und Gröfse der Bilder.

Den Abstand des ersten bez. zweiten Brennpunktes vom ersten bez. zweiten Hauptpunkte nennt man die erste bez. zweite Hauptbrennweite des Systems. Bezeichnen wir sie mit F_0 bez. F_m, und die Abstände eines anderen Paares conjugirter Vereinigungspunkte 0 und 1 von den beiden Hauptpunkten mit r_0 und r_m, so können wir unsere Gleichung (328b) nunmehr schreiben:

$$\frac{F_0}{r_0} + \frac{F_m}{r_m} = 1 \tag{331}$$

Daraus folgt:

$$r_0 \cdot r_m = F_0 \cdot r_m + F_m \cdot r_0 \tag{331a}$$

und

$$\left.\begin{aligned} r_0 &= \frac{F_0 \cdot r_m}{r_m - F_m} \\ r_m &= \frac{F_m \cdot r_0}{r_0 - F_0} \end{aligned}\right\} \tag{331b}$$

Es sind diese beiden letzten Gleichungen völlig analog unseren früheren für eine brechende Fläche gültigen Gleichungen (300), (300a) und (300b); nur sind hier die Brennweiten sowie die Object- und Bildabstände nicht vom Scheitel der Fläche, sondern von den Hauptpunkten gemessen. Wir werden aber später in § 87 sehen, dafs jene Gleichungen (300), (300a) und (300b) ein specieller Fall unserer jetzigen Gleichungen (331), (331a) und (331b) sind, indem bei einem brechenden System, das nur aus einer einzigen Fläche besteht, die beiden Hauptpunkte zusammenfallen, und zwar in dem Scheitel dieser Fläche.

Um nun die Gröfse der Bilder im Allgemeinen zu berechnen, müssen wir von den beiden ähnlichen Dreiecken $c_2 b_2 P_2$ und $g f P_2$ ausgehen. An ihnen besteht die Proportion

$$c_2 b_2 : f g = b_2 P_2 : f P_2 \tag{332}$$

Bezeichnen wir die Gröfse des Objectes $sp = b_1 c_1 = b_2 c_2$ mit β_0, und die Gröfse des Bildes fg, weil es umgekehrt ist, mit $-\beta_m$, und beachten ferner, dafs nach den soeben eingeführten Bezeichnungen

$b_2 P_2 = F_m$ und $b_2 f = r_m$, also $f P_2 = r_m - F_m$ ist, so erhalten wir aus unserer Proportion (332) die Gleichung:

$$-\frac{\beta_0}{\beta_m} = \frac{F_m}{r_m - F_m} \quad . \tag{332a}$$

Aus unserer Gleichung (331) läfst sich nun aber ableiten, dafs

$$\frac{F_m}{r_m - F_m} = \frac{r_0 - F_0}{F_0}$$

ist; es ergiebt sich daher zur Berechnung der Bildgröfse die Doppelgleichung

$$-\frac{\beta_0}{\beta_m} = \frac{F_m}{r_m - F_m} = \frac{r_0 - F_0}{F_0} \tag{332b}$$

Nennen wir den Abstand zweier conjugirter Vereinigungspunkte von den Brennpunkten x_0 und x_m, so dafs also

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= r_0 - F_0 \\ x_m &= r_m - F_m , \end{aligned}\right\} \tag{333}$$

so folgt aus der letzten Gleichung

$$x_0 \cdot x_m = F_0 \cdot F_m \tag{334}$$

und ferner

$$\frac{\beta_0}{\beta_m} = -\frac{x_0}{F_0} = -\frac{F_m}{x_m}. \tag{334a}$$

Damit haben wir ein Gesetz gefunden, welches dem am Ende von § 76 für eine einzelne brechende Fläche erhaltenen völlig analog ist, und welches uns gestattet, die Bildgröfse aus der Objectgröfse zu berechnen, sobald wir den Abstand des Objectes von dem vorderen Brennpunkte oder des Bildes von dem hinteren Brennpunkte und die dem betreffenden Brennpunkte zugehörige Hauptbrennweite kennen.

Es läfst sich nun ferner mit Benutzung der in § 78 für eine einzelne brechende Fläche bewiesenen Beziehungen der optischen Divergenz der Strahlen zu der Bildgröfse ein einfaches Verhältniss zwischen der Gröfse der beiden Hauptbrennweiten ableiten. Wir fanden damals (Gleichung 321c), wenn β_0 die Objectgröfse, β_1 die Bildgröfse, n_0 und n_1 die Brechungsverhältnisse der beiden Medien und α_0 und α_1 die Divergenz der Strahlen vor und nach der Brechung bezeichnen, dafs

$$\beta_0 \cdot n_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 = \beta_1 \cdot n_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$$

ist. Da diese Gleichung nun für jede brechende Fläche gilt, so gilt sie auch für eine beliebige Anzahl von brechenden Flächen, falls nur

die Axe bei den verschiedenen Brechungen dieselbe ist; das ist aber bei einem centrirten Systeme brechender Flächen der Fall. Es wird also das Product aus der optischen Divergenz und der Bildgröfse nach der Brechung an der letzten Fläche denselben Werth haben müssen, wie vor der ersten Brechung. Es gilt demnach in unserem centrirten Systeme die Gleichung

$$\beta_0 \cdot n_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 = \beta_m \cdot n_m \cdot \operatorname{tg} \alpha_m \tag{335}$$

In Figur 43 sei ein centrirtes brechendes System, dessen beide Hauptpunkte in b_1 und b_2 liegen mögen, wieder durch seine erste und letzte brechende Fläche dargestellt. Das Object ps habe die

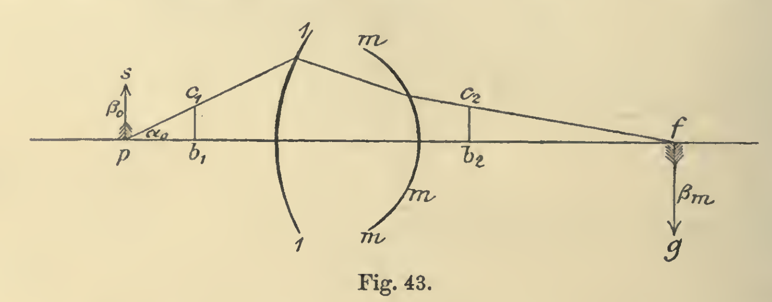


Fig. 43.

Gröfse β_0, und von ihm werde das Bild fg von der Gröfse β_m entworfen. Ein von dem in der Axe liegenden Punkte p des Objectes ausgehender Strahl, welcher mit der letzteren den Divergenzwinkel α_0 bildet, schneide in c_1 die erste Hauptebene; dann wird sein Schnittpunkt c_2 in der zweiten Hauptebene von dem zweiten Hauptpunkte b_2 ebenso weit entfernt sein, wie c_1 von b_1. Wir setzen nun

$$b_1 c_1 = b_2 c_2 = s$$

und nennen ferner $-\alpha_m$ den Winkel, welchen der Strahl in dem Bildpunkte f mit der Axe bildet; den Winkel rechnen wir negativ, weil der Strahl mit der Axe convergirt, und wir die Divergenz als positiv nehmen. Dann ist mit Benutzung unserer bisherigen Bezeichnungen

$$r_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_0 = s = - r_m \cdot \operatorname{tg} \alpha_m \tag{336}$$

Wir können unsere Gleichung (335) also umformen in

$$\frac{\beta_0 \cdot n_0}{r_0} = - \frac{\beta_m \cdot n_m}{r_m} \tag{337}$$

oder

$$- \frac{\beta_m}{\beta_0} \cdot \frac{r_0}{r_m} = \frac{n_0}{n_m} \tag{337a}$$

Nun folgt aber aus Gleichung (331)

$$\frac{r_0}{r_m} = \frac{r_0 - F_0}{F_m}$$

und ferner ist nach Gleichung (332b)

$$-\frac{\beta_m}{\beta_0} = \frac{F_0}{r_0 - F_0}$$

Setzen wir diese beiden Werthe auf der linken Seite unserer Gleichung (337a) ein, so ergiebt sich unmittelbar

$$\frac{F_0}{F_m} = \frac{n_0}{n_m} \qquad (338)$$

Die erste Hauptbrennweite verhält sich also zur zweiten, wie das Brechungsverhältniss des ersten Mediums zu dem des letzten. Falls also das erste Medium des Systems dasselbe ist wie das letzte, was bei allen unseren Mikroskopen, Fernrohren und sonstigen optischen Instrumenten der Fall ist, wenn sie in gewöhnlicher Weise in der Luft benutzt werden, so haben wir nur mit einer Brennweite des ganzen Systems zu rechnen. Denn weil dann $n_0 = n_m$ ist, so ist auch $F_0 = F_m$.

Der früher in § 73 behandelte Fall, dafs nur eine brechende Fläche vorliegt, ist ein specieller Fall des jetzt allgemein abgeleiteten Satzes; er hatte dadurch eine besondere Eigenthümlichkeit, dafs bei ihm nothwendig das zweite Mittel ein anderes Brechungsverhältniss haben mufste, als das erste, und wir daher stets zwei Brennweiten zu unterscheiden hatten.

§ 84. Die Knotenpunkte und Knotenebenen.

Setzen wir in unserer Gleichung (334)

$$x_0 \cdot x_m = F_0 \cdot F_m$$

den Abstand des Objectes vom vorderen Brennpunkt

$$x_0 = -F_m$$

d. h. legen wir das Object so weit hinter den vorderen Brennpunkt, dafs sein Abstand von diesem gleich der hinteren Brennweite ist, so ergiebt sich

$$x_m = -F_0$$

Der Bildpunkt liegt dann also in einer Entfernung, die gleich der vorderen Brennweite ist, vor dem hinteren Brennpunkte. Diese beiden conjugirten Vereinigungspunkte haben besondere Eigenthümlichkeiten

und sind für die Construction der Bildpunkte im Allgemeinen von grofser Bedeutung. Sie werden die Knotenpunkte des Systems genannt, und die durch sie gelegten zur Axe senkrechten Ebenen heifsen die Knotenebenen.

Führen wir nun in unsere Gleichung (334a)

$$\frac{\beta_0}{\beta_m} = -\frac{x_0}{F_0}$$

den Werth

$$x_0 = -F_m$$

ein, so ergiebt sich

$$\frac{\beta_0}{\beta_m} = \frac{F_m}{F_0} \tag{339}$$

oder, da sich die beiden Hauptbrennweiten nach Gleichung (338) wie die Brechungsverhältnisse des ersten und des letzten Mediums verhalten,

$$\frac{\beta_0}{\beta_m} = \frac{n_m}{n_0} \tag{339a}$$

oder

$$n_0 \cdot \beta_0 = n_m \cdot \beta_m \tag{339b}$$

Die Bildgröfsen in dem vorderen und hinteren Knotenpunkt verhalten sich also umgekehrt wie die Hauptbrennweiten, oder umgekehrt wie die Brechungsverhältnisse des ersten und letzten Mediums.

Aus der zuletzt erhaltenen Gleichung (339b) und der früheren Gleichung (335) folgt aber unmittelbar

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha_m \tag{339c}$$

oder

$$\alpha_0 = \alpha_m \tag{339d}$$

Wenn also ein Strahl unter einem bestimmten Winkel in dem ersten Medium nach dem vorderen Knotenpunkte hingeht, so wird er in dem letzten Medium parallel seiner ersten Lage von dem hinteren Knotenpunkte fortgehen.

Aus der Lage der Hauptpunkte und Knotenpunkte geht hervor, dafs stets der Abstand der beiden Hauptpunkte von einander gleich ist dem Abstand der beiden Knotenpunkte von einander, und dafs ferner der Abstand der gleichnamigen Haupt- und Knotenpunkte voneinander gleich ist dem Unterschied der beiden Brennweiten. Der Abstand der ungleichnamigen Haupt- und Knotenpunkte von einander bleibt ganz unbestimmt und ist für die verschiedenen Systeme verschieden.

Die Hauptpunkte, Brennpunkte und Knotenpunkte werden mit dem gemeinsamen Namen „Cardinalpunkte“ bezeichnet.

Haben das erste und das letzte Medium das gleiche Brechungsverhältnifs, so sind auch die beiden Hauptbrennweiten einander gleich, und damit fällt der vordere Knotenpunkt mit dem vorderen Hauptpunkt, und der hintere Knotenpunkt mit dem hinteren Hauptpunkt zusammen, und die Knotenebenen werden mit den Hauptebenen identisch. Die auf die Knotenebenen bezügliche Gleichung (339b) befindet sich dann auch, da in diesem Falle $n_0 = n_m$ ist, im Einklang mit der in § 82 gegebenen Definition der Hauptebenen.

§ 85. Construction des Strahlenganges und des Bildpunktes.

Wir wollen einmal annehmen, dafs der Gang eines Lichtstrahles in dem ersten Medium eines centrirten optischen Systems bekannt sei, und dann suchen, welches der Gang dieses Strahls in dem letzten Medium ist, nachdem er also sämmtliche brechende Flächen passirt hat. Es sei AB in Fig. 44 die Axe des Systems, auf ihr liegen die

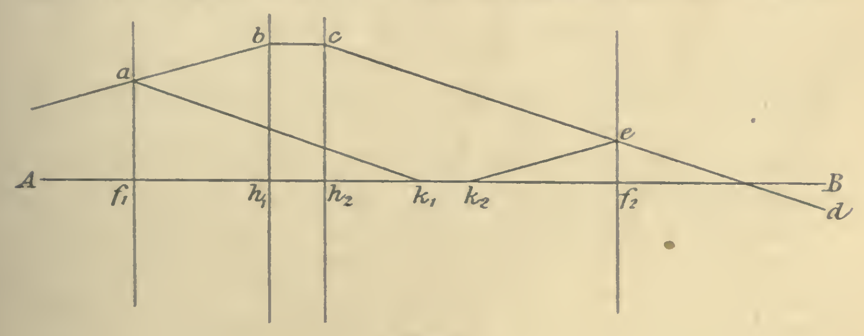


Fig. 44.

Brennpunkte f_1 und f_2, die Hauptpunkte h_1 und h_2, die Knotenpunkte k_1 und k_2; ferner sind in der Figur die Brennebenen und die Hauptebenen gezeichnet. Ist dann der Gang des betreffenden Strahles in dem ersten Medium gegeben, so verlängern wir denselben, bis er die erste Brenn- und die erste Hauptebene schneidet; a und b seien die beiden Schnittpunkte, die im Allgemeinen nicht in einer Ebene mit der Axe ab liegen werden. Da die eine Hauptebene das Bild der andern ist, und da ferner in diesem Falle das eine Bild dem andern gleich und gleich gerichtet ist, so liegt das Bild des Punktes b der ersten Hauptebene in c, dem Fufspunkte des von b auf die zweite Hauptebene gefällten Lothes. Jeder Lichtstrahl also, der von b ausgeht oder durch b hindurchgeht, mufs nach

der Brechung so gerichtet sein, dafs er durch *c* als dem Bilde von *b* geht. Es mufs demnach auch der ursprüngliche Strahl, dessen Fortgang wir betrachten wollen, nachdem er das ganze System passirt hat, so gerichtet sein, als wenn er von *c* herkäme. Ferner ist nun zu beachten, dafs alle Strahlen, welche von einem Punkte *a* der ersten Brennebene ausgehen, zufolge der in § 80 gegebenen Definition der letzteren, nach dem Durchgang durch das ganze System untereinander parallel sind. Der Strahl aber, welcher von jenem Punkte *a* nach dem ersten Knotenpunkte geht, hat nach dem Durchgang durch das ganze System seine Richtung beibehalten; es müssen also alle Strahlen und damit auch der gesuchte Strahl parallel $a k_1$ sein. Wenn wir demnach durch *c* eine Parallele zu $a k_1$ ziehen, so mufs diese, soweit sie in dem letzten Medium liegt, den Verlauf des ursprünglichen Strahles nach der Brechung in diesem Medium darstellen.

Nach dem, was in § 80 über die zweite Brennebene gesagt ist, können wir aber auch eine andere Construction vornehmen. Ist der Punkt *c* in der angegebenen Weise gefunden, so ziehen wir zu *a b* eine Parallele durch k_2; dann ist der Schnittpunkt derselben mit der zweiten Brennebene ein Punkt, der ebenfalls in der gesuchten Strahlenrichtung liegt, und diese ist demnach gegeben durch die Gerade *c e*.

Es ist leicht ersichtlich, dafs beide Constructionsverfahren zu demselben Ergebnifs führen.

Wollen wir nun zu einem Objectpunkte den Bildpunkt construiren, so ist es nur nöthig, zwei beliebige von dem ersteren ausgehende Strahlen bis zum letzten Medium des Systems zu verfolgen; denn da unter den gemachten Annahmen sämmtliche von dem Objectpunkte ausgehenden Strahlen auch nach der Brechung homocentrisch sind, so ist der Schnittpunkt zweier Strahlen stets der Schnittpunkt des ganzen Bündels. Der wirkliche oder der durch Verlängerung nach rückwärts gebildete virtuelle Schnittpunkt der in dem letzten Medium liegenden Strecken der beiden verfolgten Strahlen ist dann der Bildpunkt.

Der einfachste Fall ist der, dafs der Objectpunkt in der Axe liegt; denn dann geht der in der Axenrichtung verlaufende Strahl ungebrochen durch das System durch, und wenn wir aufserdem noch einen andern beliebigen Strahl durch das ganze System verfolgen, so ist sein letzter Schnittpunkt mit der Axe der Bildpunkt.

Wenn der Objectpunkt aufserhalb der Axe liegt, so ist es am bequemsten zur Construction des Bildpunktes, den mit der Axe

parallelen Strahl und den nach dem ersten Knotenpunkte gerichteten Strahl zu benutzen.

In Figur 45 seien f_1 und f_2 die Brennpunkte, h_1 und h_2 die Hauptpunkte, k_1 und k_2 die Knotenpunkte eines centrirten brechenden Systems; aufserdem sind noch die beiden Hauptebenen gezeichnet. Der Objectpunkt sei a. Wir ziehen von diesem zur Axe AB des Systems eine Parallele, welche die zweite Hauptebene in b schneiden

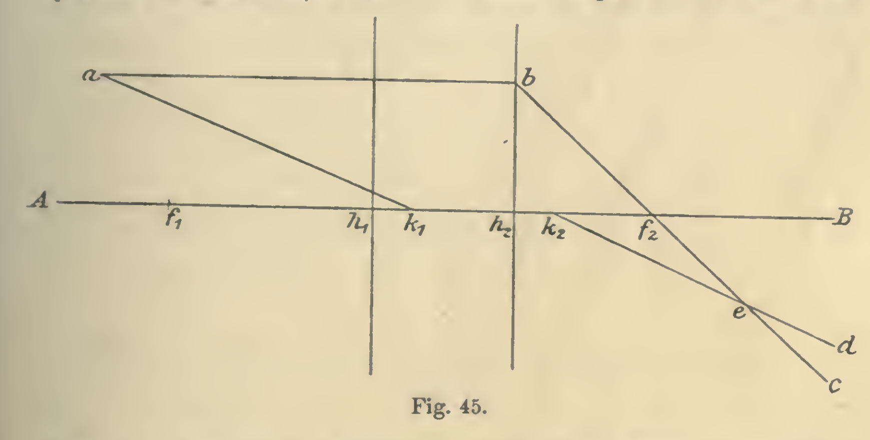


Fig. 45.

möge. Der Verlauf des Strahles in dem letzten Medium mufs dann auf der durch diesen Punkt b und den hinteren Brennpunkt f_2 gezogenen Geraden bc liegen. Ferner ziehen wir den Strahl ak_1 zum ersten Knotenpunkt, dann liegt seine Fortsetzung im letzten Medium in der durch den hinteren Knotenpunkt k_2 zu ak_1 gezogenen Parallele $k_2 d$, und der Schnittpunkt e dieser Parallele mit dem zuerst construirten Strahl bc ist der gesuchte Bildpunkt.

Es ist noch zu beachten, dafs in der Wirklichkeit so grofse Divergenzwinkel der Strahlen mit der Axe des Systems, wie sie in der Figur gezeichnet sind, nicht vorkommen dürfen, wenn die hier benutzten Gesetze über den Gang der Strahlen noch gültig bleiben sollen.

Eine andere Methode zur Construction des Bildpunktes besteht darin, dafs man die Bilder in den Knotenpunkten benutzt, was aber stets viel umständlicher ist; denn dann mufs man die Gröfse der Bilder in den Knotenebenen im Verhältnifs der Brennweiten reduciren.

Beide Methoden sind identisch bei denjenigen Systemen, in denen Hauptpunkte und Knotenpunkte zusammenfallen, d. h. bei welchen das erste und letzte Medium dasselbe Brechungsverhältnifs besitzen.

§ 86. Die Lage der Cardinalpunkte in einem centrirten System brechender Kugelflächen, welches aus zwei andern centrirten Systemen zusammengesetzt ist.

Da die Zahl der brechenden Flächen in einem centrirten optischen Systeme unbegrenzt ist, so kann man zwei derartige Systeme, welche dieselbe Axe haben, stets als ein einziges System auffassen. Wir wollen nunmehr die Lage der Cardinalpunkte des zusammengesetzten Systems bestimmen, wenn die Lage der Cardinalpunkte der beiden Theilsysteme bekannt ist. Da zur vollständigen Bestimmung eines Systems die Brennpunkte und Hauptpunkte ausreichen — denn wenn diese gefunden sind, so sind auch die Knotenpunkte gegeben — so wollen wir uns zunächst damit beschäftigen, aus den bekannten Brennpunkten und Hauptpunkten der beiden Theilsysteme die Brennpunkte und Hauptpunkte des gesammten Systems zu suchen.

Die Brennpunkte seien mit f_1 und f_2, die Hauptpunkte mit h_1 und h_2 bezeichnet, und zwar sollen diese Bezeichnungen ungestrichen bleiben (f_1, f_2, h_1, h_2), wenn sie sich auf das resultirende System, hingegen einmal bez. zweimal gestrichen sein (f_1', f_2', h'_1, h'_2 bez. f''_1, f''_2, h''_1, h''_2), wenn sie sich auf das erste bez. zweite Theilsystem beziehen. Diese Bezeichnung ist auch in Figur 46 angewandt, wo

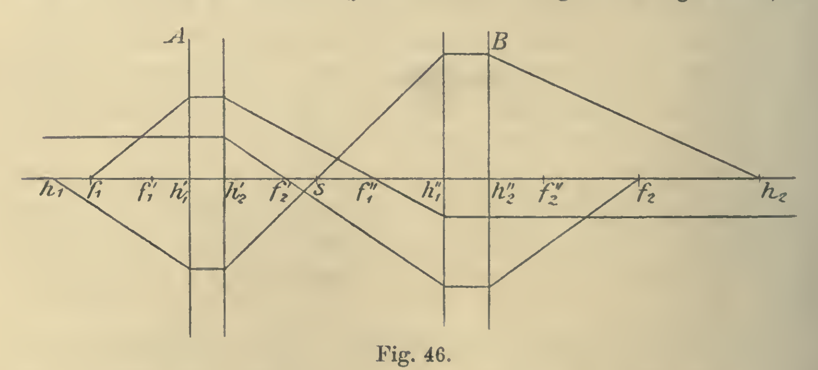


Fig. 46.

aufserdem noch die beiden Theilsysteme durch Buchstaben, A und B, unterschieden sind. In völlig analoger Weise werden die Hauptbrennweiten der Systeme mit F_1 und F_2 bez. F_1' und F_2' bez. F''_1 und F''_2 bezeichnet. Der Abstand des ersten Hauptpunktes h''_1 des zweiten Theilsystems vom zweiten Hauptpunkt h'_2 des ersten Theilsystems sei d und werde positiv gerechnet, wenn, wie dieses in unserer Figur der Fall ist, h''_1 hinter h'_2 liegt.

Der vordere Brennpunkt f_1 des combinirten Systems ist das Bild, welches das Theilsystem A vom ersten Brennpunkte f_1'' des Systemes B entwirft; denn es ist klar, wie auch in Fig. 46 durch einen eingezeichneten Strahl angedeutet wird, dafs Strahlen, welche von f_1 ausgehen, nach der Brechung im System A in f_1'' sich vereinigen, und nach der darauf erfolgenden Brechung im System B parallel der Axe verlaufen müssen. Damit entspricht aber f_1 der Definition des vorderen Brennpunktes für das combinirte System. Zur näheren Bestimmung der Lage von f_1 müssen wir nun unsere frühere Gleichung (331)

$$\frac{F_0}{r_0} + \frac{F_m}{r_m} = 1$$

auf das System A anwenden, indem wir daraus

$$r_0 = \frac{r_m \cdot F_0}{r_m - F_m}$$

ableiten, und nun beachten, dafs hier

$$r_0 = f_1 h'_1$$

und

$$r_m = h'_2 \cdot f_1'' = h'_2 h_1'' - f_1'' h_1''$$
$$= d - F_1''$$

ist, und wir nach der jetzt angewandten Bezeichnung F_1' für F_0 und F_2' für F_m zu setzen haben. Dann ergiebt sich für die Lage des vorderen Brennpunktes des combinirten Systems

$$f_1 h'_1 = \frac{(d - F_1'') \cdot F_1'}{d - F_1'' - F_2'} \tag{340}$$

Ebenso ist der hintere Brennpunkt f_2 des combinirten Systems das Bild, welches das zweite Theilsystem B von dem zweiten Brennpunkt f_2' des ersten Systems A entwirft. Durch eine der soeben durchgeführten völlig analoge Ableitung erhalten wir

$$f_2 h_2'' = \frac{(d - F_2') \cdot F_2''}{d - F_2' - F_1''} \tag{341}$$

Die beiden Hauptpunkte des combinirten Systems sind zunächst dadurch charakterisirt, dafs jeder das Bild des andern ist, und zwar bezieht sich der vordere auf den Gang der Lichtstrahlen im ersten Medium, der hintere auf den im letzten. Es mufs daher in einem der mittleren Medien, demjenigen, das für das erste System A das letzte Medium und für das zweite System B das erste Medium ist, ein beiden Hauptpunkten h_1 und h_2 des combinirten Systems

gemeinsam conjugirter Vereinigungspunkt liegen. In unserer Figur 46 sei s dieser Punkt. Es ist dann also h_1 für das System A und h_2 für das System B der Bildpunkt von s. Ist nun σ die Gröſse eines Objectes in s, ferner β' die Gröſse seines vom System A in h_1 entworfenen Bildes, β'' die Gröſse seines vom System B in h_2 entworfenen Bildes, und setzen wir

$$\left.\begin{array}{l} h'_2\, s = x \\ \text{und} \\ s\, h''_1 = y \end{array}\right\} \quad (342)$$

so ist nach der in Gleichung (332a) ausgesprochenen Regel

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\beta'}{\sigma} = \dfrac{F_2'}{F_2' - x} \\ \text{und} \\ \dfrac{\beta''}{\sigma} = \dfrac{F''_1}{F''_1 - y} \end{array}\right\} \quad (343)$$

Da nun h_1 und h_2 die Hauptpunkte des combinirten Systems sind. und β'' das Bild von β' ist, so muſs

$$\beta' = \beta''$$

sein, und wir erhalten demnach

$$\frac{F'_2}{F'_2 - x} = \frac{F''_1}{F''_1 - y} \quad (344)$$

oder

$$\frac{x}{F_2'} = \frac{y}{F''_1} \quad (344\text{a})$$

Um also den Punkt im mittleren Medium zu finden, dessen Bilder die beiden Hauptpunkte des combinirten Systems sind, theile man die Entfernung zwischen dem hinteren Hauptpunkte des ersten Systems und dem vorderen Hauptpunkte des zweiten Systems in zwei Theile, welche sich verhalten, wie die zu diesen beiden Hauptpunkten gehörigen Brennweiten der Theilsysteme. Je nachdem wir nun aus der Gleichung

$$x + y = d \quad (342\text{a})$$

die sich aus den Gleichungen (342) unter Berücksichtigung der Definition von d sofort ergiebt, in die Gleichung (344a) den Werth für x oder y substituiren, ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l} x = \dfrac{d\,.\,F_2'}{F''_1 + F_2'} \\ y = \dfrac{d\,.\,F''_1}{F''_1 + F_2'} \end{array}\right\} \quad (344\text{b})$$

Mit Hülfe dieses Werthes von x findet man nun die Entfernung $h'_1 h_1$ des ersten Hauptpunktes des combinirten Systems vor dem ersten Hauptpunkte des Theilsystemes A. Denn da der erste Hauptpunkt des combinirten Systems der Bildpunkt von s ist, so ist analog der bei der Bestimmung der Lage des ersten Brennpunktes des combinirten Systems abgeleiteten Gleichung (340) hier

$$h_1 h'_1 = \frac{x \cdot F'_1}{x - F'_2} \tag{345}$$

$$= \frac{d \cdot F_1'}{d - F''_1 - F_2'} \tag{345a}$$

Ebenso ergiebt sich für die Entfernung $h_2 h''_2$ des zweiten Hauptpunktes des combinirten Systems hinter dem zweiten Hauptpunkte des Theilsystems B

$$h_2 h''_2 = \frac{y \cdot F''_2}{y - F''_1} \tag{346}$$

$$= \frac{d \cdot F''_2}{d - F_2' - F''_1} \tag{346a}$$

Durch diese beiden Gleichungen (345a) und (346a) haben wir nun also auch die Lage der beiden Hauptpunkte des combinirten Systems gefunden, während uns die früheren Gleichungen (340) und (341) die Lage der beiden Brennpunkte des combinirten Systems ergaben. In allen vier Gleichungen findet die Beziehung auf den ersten Hauptpunkt des ersten, bez. den zweiten Hauptpunkt des zweiten Theilsystems statt. Wir können daher sehr einfach die beiden Hauptbrennweiten F_1 und F_2 des combinirten Systems finden. Denn es ist

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= h'_1 f_1 - h'_1 h_1 \\ &= \frac{F''_1 \cdot F_1'}{F''_1 + F_2' - d} \\ \text{und} \quad F_2 &= h''_2 f_2 - h''_2 h_2 \\ &= \frac{F''_2 \cdot F_2'}{F''_1 + F_2' - d} \end{aligned}\right\} \tag{347}$$

Hat man die Brennpunkte und die Hauptpunkte des combinirten Systems gefunden, so sind die Knotenpunkte ebenfalls bestimmt, da der erste Knotenpunkt im Abstand der zweiten Hauptbrennweite hinter dem ersten Brennpunkte, und der hintere Knotenpunkt im Abstand der vorderen Hauptbrennweite vor dem hintern Brennpunkte liegt.

Man kann nun aber auch die beiden Knotenpunkte des combinirten Systems direct aufsuchen und dazu ein ähnliches Verfahren einschlagen, wie für die Hauptpunkte, wobei man die in § 84 abgeleitete Eigenschaft der Knotenebenen benutzt, dafs in ihnen die linearen Dimensionen zusammengehöriger Bilder sich umgekehrt verhalten, wie die Brechungsverhältnisse des ersten und letzten Mediums.

Analog den soeben benutzten Bezeichnungen seien jetzt in Fig. 47 k'_1 und k'_2 die Knotenpunkte des ersten Theilsystems A, k''_1 und k''_2

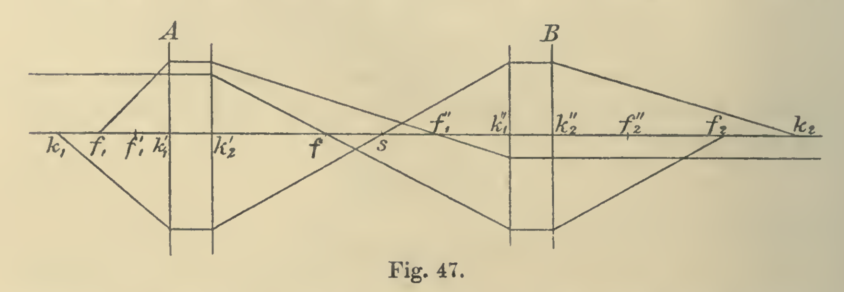


Fig. 47.

diejenigen des zweiten Theilsystems B und k_1 und k_2 die gesuchten Knotenpunkte des combinirten Systems. Es ist dann

$$k'_1 f'_1 = F'_2$$

$$k'_2 f'_2 = F'_1$$

$$k''_1 f''_1 = F''_2$$

$$k''_2 f''_2 = F''_1$$

Ebenso wie die beiden Hauptpunkte haben auch die beiden Knotenpunkte des combinirten Systems einen gemeinsamen Bildpunkt im mittleren Medium, dieser sei wieder mit s bezeichnet, und es werde ferner wieder

$$\left.\begin{aligned} k'_2 s &= x \\ k''_1 s &= y \end{aligned}\right\} \quad (348)$$

gesetzt. Es ist dann analog den obigen Gleichungen (345) und (346)

$$\left.\begin{aligned} k_1' k_1 &= \frac{x \,.\, F_2'}{x - F_1'} \\ k''_2 k_2 &= \frac{y \,.\, F''_1}{y - F''_2} \end{aligned}\right\} \quad (349)$$

Ist nun σ die lineare Gröfse eines Objectes im Punkte s des mittleren Mediums, β' die seines vom Theilsystem A in k_1 ent-

worfenen Bildes, β'' die seines vom Theilsystem B in k_2 entworfenen Bildes, so erhalten wir, da sich stets die Objectgröfse zur Bildgröfse verhält, wie der Abstand des Objectes vom vorderen Knotenpunkt zum Abstand des Bildes vom hinteren Knotenpunkt,

und

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\beta'}{\sigma} &= \frac{k_1' k_1}{x} = \frac{F_2'}{x - F_1'} \\ -\frac{\beta''}{\sigma} &= \frac{k_2'' k_2}{y} = \frac{F_1''}{y - F_2''} \end{aligned}\right\} \tag{350}$$

Zufolge der oben erwähnten Eigenschaft der Knotenebenen ist aber, wenn n_1 das Brechungsverhältnifs des ersten Mediums im System A, und n_2 das Brechungsverhältnifs des letzten Mediums im System B ist

$$n_1 . \beta' = n_2 . \beta''$$

so dafs also

$$\frac{n_1 . F_2'}{x - F_1'} = \frac{n_2 . F_1''}{y - F_2''} \tag{351}$$

Nun ist aber für das Theilsystem A, wenn wir mit ν das Brechungsverhältnifs des mittleren Mediums bezeichnen, nach Gleichung (338)

$$n_1 . F_2' = \nu . F_1'$$

und für das Theilsystem B

$$n_2 . F_1'' = \nu . F_2''$$

Setzen wir diese Werthe in Gleichung (351) ein, so ergiebt sich

$$\frac{F_1'}{x - F_1'} = \frac{F_2''}{y - F_2''} \tag{351a}$$

oder

$$\frac{x}{F_1'} = \frac{y}{F_2''} \tag{351b}$$

Diese Gleichung, welche die Lage des Punktes s bestimmt, weicht nun aber von der bei der Aufsuchung der Hauptpunkte des combinirten Systems gefundenen Gleichung (344a) nur dadurch ab, dafs in jedem der beiden Theilsysteme die andere Hauptbrennweite benutzt ist. Die weitere Fortsetzung der Rechnung würde also mit der für die Hauptpunkte durchgeführten bis auf die jedesmalige Vertauschung der beiden Hauptbrennweiten in den Theilsystemen übereinstimmen, weshalb wir sie hier nicht weiter verfolgen wollen.

§ 87. Die Eigenschaften eines aus zwei brechenden Kugelflächen bestehenden Systems.

Ein aus zwei brechenden Kugelflächen bestehendes System hat nicht nur deshalb besonderes Interesse und besondere Bedeutung, weil es das denkbar einfachste zusammengesetzte System ist, sondern dadurch, dafs man, wie wir weiter unten am Schlusse dieses Paragraphen sehen werden, für jedes beliebige centrirte System ein solches aus zwei Kugelflächen bestehendes substituiren können, ohne dafs die Lage und Gröfse der Bilder geändert wird.

Bevor wir die Lage der Cardinalpunkte in einem solchen System nach den im vorigen Paragraphen angegebenen Regeln bestimmen können, müssen wir erst die Lage dieser Punkte bei einer einfachen brechenden Kugelfläche kennen.

Die Brennpunkte haben wir in § 73 schon eingehend besprochen und brauchen daher nur auf die dort abgeleiteten Ergebnisse zu verweisen.

Die Hauptpunkte und die durch sie senkrecht zur Axe gelegten Hauptebenen sind dadurch charakterisirt, dafs die Bilder in den Hauptebenen gleich gerichtet und gleich grofs sind. Nach Gleichung (315a) kann dieses aber bei endlichen Werthen der Brennweiten nur dann der Fall sein, wenn $r_0 = 0$ und $r_1 = 0$, d. h. wenn Objectpunkt und Bildpunkt in den Punkt fallen, in dem die brechende Fläche die Axe schneidet. Dieses mufs aber nach den Gleichungen (300b) und wie wir bereits am Schlusse von § 73 sahen, stets gleichzeitig eintreten. Es ergiebt sich also, dafs bei einer einfachen brechenden Fläche die beiden Hauptpunkte zusammenfallen und zwar in dem Schnittpunkt der brechenden Fläche mit der Axe. Die im vorigen Paragraphen gegebene Bestimmung der gegenseitigen Lage der beiden combinirten Systeme durch den mit d bezeichneten Abstand des hinteren Hauptpunktes des ersten Systems von dem vorderen Hauptpunkt des zweiten Systems vereinfacht sich bei der Zusammensetzung zweier einfachen brechenden Kugelflächen zu einem System nun dahin, dafs d den Abstand der beiden Flächen auf der Axe von einander bezeichnet.

Auch die beiden Knotenpunkte, welche dadurch definirt sind, dafs jeder Strahl, der vor der Brechung durch den ersten geht, nach der Brechung durch den zweiten geht und dabei seiner ersten Richtung parallel bleibt, fallen bei einer brechenden Fläche in einen Punkt, nämlich den Mittelpunkt der Kugel, zusammen.

Denn ein Strahl, der im ersten Medium auf den Mittelpunkt der Kugel gerichtet ist, geht ungebrochen durch die Fläche hindurch, geht also auch im zweiten Medium durch den Mittelpunkt und ist seiner früheren Richtung parallel.

Bevor wir nun von dieser Lage der Cardinalpunkte bei einer einfachen brechenden Fläche Gebrauch machen, wollen wir noch darauf hinweisen, dafs hier die in § 85 dargestellten Methoden der Construction des Strahlenganges und des Bildpunktes sich wesentlich dadurch vereinfachen, dafs erstens jeder Punkt in der ersten Hauptebene sein eigenes Bild ist und man nicht erst den zugehörigen in der zweiten Hauptebene zu suchen hat, und zweitens dadurch, dafs der nach dem ersten Knotenpunkte gehende Strahl unmittelbar in seiner eigenen Verlängerung weiter geht und man nicht erst eine Parallele zu ihm durch den zweiten Knotenpunkt zu legen hat.

Es sei nun ϱ' der Radius der ersten, ϱ'' der Radius der zweiten der zu combinirenden Flächen, n_1 das Brechungsverhältnifs des ersten, v des mittleren und n_2 des letzten Mediums. Benutzen wir für die Brennweiten die Bezeichnungen des § 86, so haben wir zufolge den Gleichungen (298) für die erste Fläche

$$\left.\begin{aligned} F_1' &= \frac{n_1 \cdot \varrho'}{v - n_1} \\ F_2' &= \frac{v \cdot \varrho'}{v - n_1} \end{aligned}\right\} \tag{352}$$

und für die zweite Fläche

$$\left.\begin{aligned} F_1'' &= \frac{v \cdot \varrho''}{n_2 - v} \\ F_2'' &= \frac{n_2 \cdot \varrho''}{n_2 - v} \end{aligned}\right\} \tag{353}$$

Da hier die Hauptpunkte der Theilsysteme in die betreffenden Flächen fallen, so werden jetzt bei Anwendung der Gleichungen (345a) und (346a) die Orte der Hauptpunkte des combinirten Systems in der Weise bestimmt, dafs der Abstand des vorderen Hauptpunktes von der ersten Fläche an nach vorne, der des hinteren Hauptpunktes von der zweiten Fläche an nach hinten gerechnet ist. Wir wollen diese Abstände jetzt mit h_1 und h_2 bezeichnen; dann ergiebt sich aus den Gleichungen (345a) und (346a) durch Einsetzen der in den Gleichungen (352) und (353) erhaltenen Werthe nach einigen Umformungen

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{n_1 (\nu - n_2) . d . \varrho'}{N} \\ h_2 &= \frac{n_2 (n_1 - \nu) . d . \varrho''}{N} \end{aligned}\right\} \quad (354)$$

wobei der Kürze wegen

$$N = \nu . (n_2 - \nu) . \varrho' + \nu . (\nu - n_1) . \varrho'' - (n_2 - \nu) . (\nu - n_1) . d \quad (355)$$

gesetzt ist.

Die Entfernung der beiden Hauptpunkte des combinirten Systems, welche mit H bezeichnet werde, ist nun gleich der Summe dieser beiden Abstände h_1 und h_2 vermehrt um den auf der Axe gemessenen Abstand d der beiden brechenden Flächen. Es ist also

$$\begin{aligned} H &= h_1 + h_2 + d \\ &= \frac{n_1 (\nu - n_2) . d . \varrho'}{N} + \frac{n_2 (n_1 - \nu) . d . \varrho''}{N} + d \\ &= d \cdot \frac{(\nu - n_1)(n_2 - \nu) . (\varrho' - \varrho'' - d)}{N} \end{aligned} \quad (356)$$

Dieser Werth ist positiv, wenn der erste Hauptpunkt vor dem zweiten liegt. In ähnlicher Weise, wie wir in den Gleichungen (354) den Ort der beiden Hauptpunkte aus den früher erhaltenen Gleichungen fanden, lassen sich auch die beiden Hauptbrennweiten des combinirten Systems vermittels der Gleichungen (347) berechnen. Setzen wir in diese die Werthe für die Brennweiten der beiden einzelnen brechenden Flächen ein, so ergiebt sich nach einiger Umrechnung

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= \frac{n_1 . \nu . \varrho' . \varrho''}{N} \\ F_2 &= \frac{n_2 . \nu . \varrho' . \varrho''}{N} \end{aligned}\right\} \quad (357)$$

wobei N wieder den durch die Gleichung (355) angegebenen Werth hat.

Nehmen wir nun an, dafs die beiden brechenden Flächen denselben Krümmungsradius ϱ haben, so dafs also

$$\varrho = \varrho' = \varrho''$$

zu setzen ist, dann erhalten wir für den Abstand der beiden Hauptpunkte von den brechenden Flächen

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{n_1 (\nu - n_2) . d . \varrho}{\nu . (n_2 - n_1) . \varrho - (n_2 - \nu) . (\nu - n_1) . d} \\ h_2 &= \frac{n_2 . (n_1 - \nu) . d . \varrho}{\nu . (n_2 - n_1) . \varrho - (n_2 - \nu) . (\nu - n_1) . d} \end{aligned}\right\} \quad (358)$$

und für die Entfernung der beiden Hauptpunkte von einander

$$H = -d^2 \cdot \frac{(\nu - n_1)(n_2 - \nu)}{\nu \cdot (n_2 - n_1) \cdot \varrho - (n_2 - \nu) \cdot (\nu - n_1) \cdot d} \tag{359}$$

Für die Hauptbrennweiten ergiebt sich bei der gleichen Annahme

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{n_1 \cdot \nu \cdot \varrho^2}{\nu \cdot (n_2 - n_1) \cdot \varrho - (n_2 - \nu) \cdot (\nu - n_1) \cdot d} \\ F_2 &= \frac{n_2 \cdot \nu \cdot \varrho^2}{\nu \cdot (n_2 - n_1) \varrho - (n_2 - \nu) \cdot (\nu - n_1) \cdot d} \end{aligned} \right\} \tag{360}$$

Lassen wir nun den Abstand der beiden gleich gekrümmten Flächen immer kleiner werden, bis er endlich verschwindet, so haben wir $d = 0$ zu setzen. Dann folgt aus den Gleichungen (358)

$$h_1 = h_2 = 0 \tag{361}$$

und aus der Gleichung (359), was aber auch unmittelbar ersichtlich ist,

$$H = 0 \tag{362}$$

Für die Brennweiten erhalten wir in diesem Grenzfall

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{n_1 \varrho}{n_2 - n_1} \\ F_2 &= \frac{n_2 \cdot \varrho}{n_2 - n_1} \end{aligned} \right\} \tag{363}$$

Die Lage der Brennpunkte und Hauptpunkte ist also genau dieselbe, als wäre nur eine brechende Fläche vorhanden. Der Werth des Brechungsverhältnisses ν der unendlich dünnen mittleren Schicht ist völlig ohne Einfluſs auf die Eigenschaften des Systems. Wir können uns demnach an jeder brechenden Fläche eine unendlich dünne, durch concentrische Kugelflächen begrenzte Schicht von beliebigem Brechungsverhältniſs eingeschoben denken, ohne daſs die Brechung der Strahlen dadurch geändert wird.

Es ist dieses ein Satz, der bei der Behandlung verwickelt zusammengesetzter centrirter Systeme oftmals zur Erleichterung der Ueberlegung und Vereinfachung der Schluſsfolgerungen benutzt werden kann.

Bevor wir nun zu einer andern speciellen Annahme über die aus zwei brechenden Kugelflächen bestehenden optischen Systeme übergehen, wollen wir noch kurz die Frage der gegenseitigen Substitution verschiedener optischer Systeme besprechen. Es ist hier der geeignete Ort dazu, weil für solche Substitutionen Systeme mit zwei brechenden Flächen besondere Bedeutung haben.

Aus dem in den §§ 80—85 Dargelegten ergab sich, dafs die Gröfse und Lage der Bilder in einem centrirten Systeme nur von der Lage der Brennpunkte und der Hauptpunkte oder der Knotenpunkte abhängen; denn wenn eines dieser beiden letztgenannten Punktpaare gegeben ist, so ist damit auch das andere Paar gegeben. Man kann daher ohne Aenderung der Lage und Gröfse der Bilder zwei optische Systeme für einander substituiren, deren Brennpunkte und Hauptpunkte dieselbe Lage haben. Da das Verhältnifs der Brechungsvermögen des ersten und letzten Mediums nicht geändert werden kann, ohne das Verhältnifs der Hauptbrennweiten zu einander zu ändern, so wollen wir voraussetzen, dafs das erste und letzte Medium bei einer solchen Substitution ungeändert bleiben. Dann braucht nur die eine Hauptbrennweite und der Abstand der Hauptpunkte von einander in dem einen System gleich den entsprechenden Gröfsen des andern gemacht zu werden, um die beiden Systeme für einander substituiren zu können. In einem Systeme von nur zwei brechenden Flächen würde man zur Erfüllung dieser Bedingungen über vier Grössen ϱ', ϱ'', ν und d verfügen können. Es kann daher für jedes beliebige centrirte System brechender Kugelflächen ein System von nur zwei solchen Flächen gesetzt werden, welches ebenso grofse und ebenso gelegene Bilder entwirft wie jenes, und im Allgemeinen kann man dabei sogar immer noch zwei Bedingungen für das System von zwei Flächen aufstellen und erfüllen, z. B. dafs ϱ und ϱ' gegebene Werthe haben, oder dafs das mittlere Medium ein gegebenes Brechungsverhältnifs ν und eine gegebene Dicke d habe u. s. w.

§ 88. Die Lage der Cardinalpunkte in den Linsen.

Bei den gewöhnlich benutzten optischen Instrumenten, Fernrohren, Mikroskopen u. s. w. ist, worauf wir oben schon hingewiesen haben, das erste und letzte Medium des Systems dasselbe, es ist nämlich die Luft. Die einzelnen Bestandtheile, aus denen diese Instrumente zusammengesetzt sind, werden Linsen genannt. Man bezeichnet als Linsen solche optischen Systeme, welche aus zwei brechenden Flächen bestehen, und bei denen das erste und dritte Medium das gleiche ist. In der praktischen Optik, insbesondere derjenigen der Augenärzte, werden auch wohl Cylinderflächen als brechende Flächen benutzt, z. B. zur Erzeugung einer Lichtlinie bei der Spectralanalyse der Gestirne oder zur Correctur des sogenannten Astigmatismus der Augen u. s. w. Wir wollen hier aber von der

Besprechung solcher Systeme mit cylindrischen Flächen gänzlich absehen, da sie nicht unter die centrirten optischen Systeme einzureihen sind. Bei der Construction der optischen Instrumente werden die Linsen nun oftmals vermittels durchsichtiger Kittsubstanzen behufs Achromatisirung zu complicirteren Systemen verbunden, die man dann auch als Linsen bezeichnet. Auch diese wollen wir von unserer Betrachtung ausschliefsen, so dafs wir unter Linsen also ausschliefslich Systeme von zwei kugeligen Flächen verstehen, bei welchen das erste und letzte Medium dasselbe Brechungsverhältnifs haben.

Wir setzen also

$$n = n_1 = n_2 \tag{364}$$

Dann werden die beiden Hauptbrennweiten einander gleich, und es ergiebt sich aus den Gleichungen (357)

$$F = F_1 = F_2 = \frac{n \,.\, \nu \,.\, \varrho' \,.\, \varrho''}{(\nu - n)\,[\nu(\varrho'' - \varrho') + (\nu - n)\,.\,d]} \tag{365}$$

Die Entfernungen der Hauptpunkte, welche hier mit den Knotenpunkten zusammenfallen, von den Linsenflächen, sind nach den Gleichungen (354)

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{n \,.\, d \,.\, \varrho'}{\nu \,.\, (\varrho'' - \varrho') + (\nu - n)\,.\,d} \\ h_2 &= -\frac{n \,.\, d \,.\, \varrho''}{\nu \,.\, (\varrho'' - \varrho') + (\nu - n)\,.\,d} \end{aligned}\right\} \tag{366}$$

Nach der Festsetzung, die wir früher über diese Abstände gemacht haben, sind sie hier als positiv zu rechnen, wenn sie in dem ersten bez. letzten Medium, d. h. also, nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch aufserhalb der Linse liegen.

Die Entfernung der Hauptpunkte von einander ist hier nach Gleichung (356)

$$H = d \cdot \frac{(\nu - n)\,.\,(d + \varrho'' - \varrho')}{\nu \,.\, (\varrho'' - \varrho') + (\nu - n)\,.\,d} \tag{367}$$

Der damaligen Ableitung gemäfs ist diese Entfernung positiv, wenn der erste Hauptpunkt vor dem zweiten liegt.

Der Punkt auf der Axe, dessen Bilder die beiden Hauptpunkte (oder die hier mit diesen zusammenfallenden Knotenpunkte) sind, heifst das optische Centrum der Linse. Die Lage dieses Punktes haben wir in § 86, wo wir zwei beliebige centrirte optische Systeme combinirten, ausführlich erörtert und dort gefunden, dafs der Ab-

stand dieses Punktes von dem zweiten Hauptpunkte des ersten Systems sich zu seinem Abstand von dem ersten Hauptpunkte des zweiten Systems verhält, wie die zu diesen beiden Hauptpunkten gehörigen Brennweiten der combinirten Systeme. Nun fallen hier, wo zwei einfache brechende Flächen combinirt sind, diese Hauptpunkte in die Flächen selbst, und aus den Gleichungen (352) und (353) folgt, dafs bei Berücksichtigung der Gleichung (364) die absoluten Werthe der betreffenden Brennweiten F_2' und F_1'' sich verhalten, wie die Krümmungsradien ϱ' und ϱ''. Es ergiebt sich demnach, dafs bei einer Linse das optische Centrum zwischen den beiden brechenden Flächen liegt, und dafs seine Entfernungen von diesen Flächen den Krümmungsradien dieser Flächen proportional sind. Wir wollen nunmehr die Definition einer Linse noch weiter durch die Annahme einschränken, dafs $v > n$ und dafs der Abstand d kleiner als der kleinere der beiden Krümmungsradien ϱ' und ϱ'' sei. Diese Annahmen entsprechen den in der Wirklichkeit fast ausschliefslich vorkommenden Verhältnissen; denn dort bildet die Luft das erste und letzte Medium, und die Dicke der Linse ist gewöhnlich sehr gering.

Da solche Linsen eine sehr ausgedehnte praktische Anwendung finden, so wollen wir hier noch ihre verschiedenen Formen eingehender besprechen.

1. Biconvexe Linsen, bei denen beide Flächen convex, also ϱ' positiv und ϱ'' negativ ist. Die Gleichung (365) ergiebt dann, dafs die Brennweite F stets positiv ist, während aus den Gleichungen (366) folgt, dafs die Abstände h_1 und h_2 der Hauptpunkte von den brechenden Flächen stets negativ, ihrem absoluten Betrage nach aber nie gröfser als d sind. Die Hauptpunkte liegen demnach stets innerhalb der Linse. Ihr nach der Gleichung (367) berechneter gegenseitiger Abstand hat hier einen positiven Werth, so dafs also der erste Hauptpunkt stets vor dem zweiten liegt.

2. Planconvexe Linsen bilden einen Grenzfall der biconvexen Linsen, indem bei ihnen einer der Krümmungsradien unendlich grofs ist. Es möge $\varrho' = \infty$ sein, d. h. die Linse wendet den auffallenden Strahlen die plane Seite zu. Bevor wir diesen Werth einführen, müssen wir diejenigen Ausdrücke für Brennweite u. s. w., in welchen ϱ' im Zähler und Nenner vorkommt, in geeigneter Weise umformen. Wir erhalten dann

$$F = \frac{v\,n\,\varrho''}{(v-n)\left[v\cdot\left(\frac{\varrho''}{\varrho'}-1\right)\right]+(v-n)\cdot\frac{d}{\varrho'}} \tag{365a}$$

$$H = d \cdot \frac{(\nu - n) \cdot \left(\frac{d}{\varrho'} + \frac{\varrho''}{\varrho'} - 1\right)}{\nu \cdot \left(\frac{\varrho''}{\varrho'} - 1\right) + (\nu - n) \cdot \frac{d}{\varrho'}} \tag{367a}$$

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= \frac{n \,.\, d}{\nu \cdot \left(\frac{\varrho''}{\varrho'} - 1\right) + (\nu - n) \cdot \frac{d}{\varrho'}} \\ &\text{während} \\ h_2 &= - \frac{n \,.\, d \,.\, \varrho''}{\nu \,.\, (\varrho'' - \varrho') + (\nu - n) \,.\, d} \end{aligned}\right\} \tag{366a}$$

nicht umgeformt zu werden braucht. Setzen wir nun

$$\varrho' = \infty \tag{368}$$

so ergiebt sich

$$F = - \frac{n\,\varrho''}{\nu - n} \tag{369}$$

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= - d \cdot \frac{n}{\nu} \\ h_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{370}$$

und

$$H = d \cdot \frac{\nu - n}{\nu} \tag{371}$$

Aus diesen Werthen folgt nun unmittelbar, da ϱ'' negativ ist, dafs die Brennweite F auch bei den planconvexen Linsen stets positiv ist. Der erste Hauptpunkt liegt auch hier, da $\nu > n$ sein soll, innerhalb der Linse, während der zweite Hauptpunkt in die gekrümmte Fläche fällt.

Setzen wir $\varrho'' = \infty$, so dafs also die convexe Seite den ankommenden Strahlen zugekehrt ist, so erhalten wir in ganz analoger Weise:

$$F = \frac{n \,.\, \varrho'}{\nu - n} \tag{372}$$

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= 0 \\ h_2 &= - d \cdot \frac{n}{\nu} \end{aligned}\right\} \tag{373}$$

und

$$H = d \cdot \frac{\nu - n}{\nu} \tag{374}$$

Die Brennweite ist also auch hier positiv; hier fällt aber der erste

Hauptpunkt in die gekrümmte Fläche, während der zweite im Innern der Linse liegt.

Das optische Centrum einer planconvexen Linse fällt in den Schnittpunkt der gekrümmten Fläche mit der Axe, da der Krümmungsradius dieser Fläche unendlich klein ist gegenüber dem Krümmungsradius der ebenen Fläche.

3. Biconcave Linsen, bei denen beide Flächen concav nach aufsen sind; es ist demnach ϱ' negativ, ϱ'' positiv. Unsere Gleichung (365) ergiebt hier einen negativen Werth für die Brennweite F. Die Abstände h_1 und h_2 der Hauptpunkte von den brechenden Flächen sind ebenfalls negativ, und zwar ebenso, wie bei den biconvexen Linsen ihrem absoluten Betrage nach niemals gröfser als d; die Hauptpunkte liegen also stets innerhalb der Linse, und ihr Abstand von einander ist nach Gleichung (367) positiv, d. h. der erste liegt vor dem zweiten.

4. Planconcave Linsen bilden einen Grenzfall der biconcaven, indem hier der Krümmungsradius der einen brechenden Fläche unendlich grofs wird. Wie aus einer der bei den planconvexen Linsen durchgeführten völlig analogen Betrachtung hervorgeht, haben sie stets eine negative Brennweite, und es fällt stets einer der beiden Hauptpunkte in die gekrümmte Fläche, während der andere im Innern der Linse liegt.

5. Concavconvexe Linsen; bei ihnen sind beide Radien entweder positiv oder negativ. Wir wollen zunächst das erstere annehmen, d. h. voraussetzen, dafs beide brechende Flächen dem auffallenden Lichte die convexe Seite zuwenden. Aus Gleichung (365) folgt, dafs die Brennweite dann positiv ist, wenn

$$\nu . (\varrho'' + d - \varrho') > n . d \tag{375}$$

dafs sie unendlich, wenn

$$\nu . (\varrho'' + d - \varrho') = n . d \tag{376}$$

und negativ, wenn

$$\nu . (\varrho'' + d - \varrho') < n . d \tag{377}$$

Nun bezeichnet aber $\varrho'' + d - \varrho'$ den Abstand des Krümmungsmittelpunktes der zweiten Fläche von dem der ersten nach hinten gerechnet. Ist die Ungleichung (375) erfüllt, so ist nothwendig dieser Abstand $\varrho'' + d - \varrho'$ positiv, da d immer positiv gerechnet wird; es mufs also dann der Krümmungsmittelpunkt der zweiten Fläche hinter dem der ersten liegen, es wird dann aber stets die Linse nach dem Rande zu dünner. Wir können also sagen:

Hat eine concavconvexe Linse eine positive Brennweite, so wird sie nach dem Rande zu dünner. Die Umkehrung dieses Satzes ist nicht richtig; denn es können auch positive Werthe von $\varrho'' + d - \varrho'$ vorkommen, welche die Ungleichung (375) nicht erfüllen, wie z. B. der die Gleichung (376) erfüllende Werth.

Ist der Abstand $\varrho'' + d - \varrho'$ negativ, liegt also der Krümmungsmittelpunkt der zweiten Fläche vor demjenigen der ersten Fläche, wobei die Linse nach dem Rande zu stets dicker wird, so ist die Ungleichung (377) immer erfüllt, so dafs also dann die Linse immer eine negative Brennweite hat. Wir können also sagen: Wird eine concavconvexe Linse nach dem Rande zu dicker, so hat sie eine negative Brennweite. Auch hier ist die Umkehrung des Satzes nicht zulässig, denn die Ungleichung (377) kann auch durch positive Werthe für $\varrho'' + d - \varrho'$ erfüllt werden.

Aus den Gleichungen (366) für die Abstände h_1 und h_2 der beiden Hauptpunkte von den Linsenflächen ergiebt sich nun hier unter Beachtung der soeben besprochenen Werthe der Brennweiten, dafs der erste Hauptpunkt vor der convexen Seite der Linse liegt, wenn die Brennweite positiv ist, und dafs er in das Unendliche fällt, wenn die Brennweite unendlich wird. Ist die Brennweite negativ, so liegt der erste Hauptpunkt hinter der convexen Fläche der Linse, ebenfalls unendlich weit, wenn die Brennweite unendlich grofs ist. Er rückt um so näher an die convexe Fläche heran, je kleiner ϱ' und je gröfser ϱ''. Ist ϱ'' unendlich grofs, so wird $h_1 = 0$, d. h. der erste Hauptpunkt fällt in die convexe Fläche; es ist in diesem Falle die Linse aber in eine planconvexe übergegangen, und das hier erhaltene Resultat stimmt auch mit dem unter 2) für diese Linsen abgeleiteten überein.

Der zweite Hauptpunkt liegt vor der concaven Fläche der Linse, d. h. auf ihrer convexen Seite, wenn die Brennweite der Linse positiv ist; er liegt hinter dieser Fläche, wenn die Brennweite negativ ist; er rückt ebenfalls ins Unendliche bei unendlich grofser Brennweite.

Der Abstand H der beiden Hauptpunkte ist durch die Gleichung (367) gegeben. Die verschiedenen Werthe desselben für alle hier möglichen Fälle wollen wir nicht weiter erörtern, sondern nur auf einen besonderen Fall hinweisen. Wenn nämlich die beiden brechenden Flächen der Linse concentrischen Kugelschalen angehören, so fallen, da dann

$$d + \varrho'' - \varrho' = 0 \tag{378}$$

ist, beide Hauptpunkte zusammen, und zwar liegen sie, wie sich

aus den Werthen von h_1 und h_2 in den Gleichungen (366) unmittelbar unter Berücksichtigung der Gleichung (378) ergiebt, in dem gemeinsamen Krümmungsmittelpunkte der Linsenflächen.

Der zweite Fall, dafs beide Radien der brechenden Flächen negativ sind, ergiebt sich aus dem bisher Abgeleiteten sofort, wenn wir die erste Seite der Linse zur zweiten machen.

§ 89. Die Lage und Gröfse der von Linsen erzeugten Bilder.

In § 83, wo wir die Lage der Bilder in beliebigen centrirten Systemen untersuchten, fanden wir die Gleichung (331)

$$\frac{F_0}{r_0} + \frac{F_m}{r_m} = 1$$

in der F_0 und F_m die Brennweiten des Systems, und r_0 bez. r_m die Abstände des Objectes bez. des Bildes von den beiden Hauptebenen bezeichnen. Nun sind aber bei Linsen die beiden Brennweiten einander gleich, wir haben sie mit F bezeichnet. Führen wir an Stelle der Indices 0 und m die von uns bei den Linsen benutzten Indices 1 und 2 ein, so ergiebt sich

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{1}{F} \tag{379}$$

oder

$$r_1 = \frac{r_2 \,.\, F}{r_2 - F}$$

und

$$r_2 = \frac{r_1 \,.\, F}{r_1 - F} \tag{380}$$

Die in demselben Paragraphen über die Bildgröfse abgeleitete Gleichung (332b) formt sich in analoger Weise für Linsen um in

$$-\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{F}{r_2 - F} = \frac{r_1 - F}{F} \tag{381}$$

Nennen wir nun hier x_1 bez. x_2 die Abstände zweier conjugirter Vereinigungspunkte von den Brennpunkten, so dafs also

$$x_1 = r_1 - F$$
$$x_2 = r_2 - F,$$

so erhalten wir den früheren Gleichungen (334) und (334a) analog

$$x_1 \,.\, x_2 = F^2 \tag{382}$$

und

$$-\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{F}{x_2} = \frac{x_1}{F} \tag{383}$$

Hiernach ist die Brennweite der Linse in allen Fällen die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Bildabständen x_1 und x_2 von den Brennpunkten. Es mufs daher von ihnen stets einer gröfser als F, der andere kleiner als F sein, wenn nicht beide gleich $-F$ oder $+F$ sind. Ferner müssen x_1 und x_2 immer gleichzeitig positiv oder negativ sein, d. h. wenn das Object vor dem ersten Brennpunkt liegt, liegt das Bild hinter dem zweiten und umgekehrt.

Bei Linsen mit positiver Brennweite (Sammellinsen) liegt der erste Brennpunkt vor der Linse, der zweite dahinter. Dafs die Brennpunkte nicht in die Linse fallen können, ergiebt sich aus den Gleichungen (365) und (366) unter Berücksichtigung der hier gemachten Annahme, dafs stets $\nu > n$ und d kleiner als jeder der Werthe ϱ' und ϱ'' sein soll. Bei einem positiven Werth von x_1, der also vorhanden ist, wenn das Object weiter von der Vorderseite der Linse entfernt ist, als der erste Brennpunkt, liegt das Bild hinter der Linse weiter entfernt als der zweite Brennpunkt und ist nach Gleichung (383) umgekehrt. Dabei ist die Entfernung x_2 vom zweiten Brennpunkte ebenso wie die Gröfse β_2 des Bildes umgekehrt proportional der Entfernung x_1 des Objectes vom ersten Brennpunkte. Es wird $x_2 = x_1$ und $\beta_2 = -\beta_1$, wenn $x_1 = F$, d. h. wenn das Object um die doppelte Brennweite von der Linse absteht.

Bei negativen Werthen von x_1, welche absolut kleiner als F sind, liegt das Object zwischen dem ersten Brennpunkt und der Linse (oder genauer zwischen dem ersten Brennpunkte und dem ersten Hauptpunkte). Dann liegt, da nun auch x_2 negativ, aber absolut genommen gröfser als F sein mufs, das aufrechte vergröfserte Bild vor der Linse (genauer vor dem zweiten Hauptpunkt), ist also virtuell. Dies entspricht dem Falle, wo die Linse als Loupe gebraucht wird.

Für $x_1 = -F$ sind Object und Bild gleich grofs und gleichgerichtet und liegen in den beiden Hauptebenen der Linse.

Wenn x_1 negativ, aber absolut genommen gröfser als F ist, d. h. wenn wir ein virtuelles hinter der Linse (genauer hinter dem vorderen Hauptpunkte) gelegenes Object haben, so mufs x_2 ebenfalls negativ, aber absolut genommen kleiner als F sein. Das reelle, verkleinerte und aufrechte Bild liegt dann zwischen der Linse (genauer dem hinteren Hauptpunkte) und ihrem zweiten Brennpunkte.

Für Linsen mit negativer Brennweite (Zerstreuungslinsen) liegt der erste Brennpunkt hinter, der zweite vor der Linse.

Liegt das Object vor der Linse (d. h. vor dem vorderen Hauptpunkt), ist also x_1 positiv und gröfser, als der absolute Betrag der Brennweite, so mufs x_2 ebenfalls positiv sein und zwar kleiner als der absolute Betrag der Brennweite. Das aufrechte und verkleinerte Bild liegt also vor der Linse (d. h. vor dem hinteren Hauptpunkt), aber hinter dem zweiten, vorne gelegenen Brennpunkt, ist also virtuell.

Für $x_1 = -F$ fallen Object und Bild in die beiden Hauptebenen; beide sind gleich grofs und gleich gerichtet.

Einem virtuellen Bilde hinter (dem vorderen Hauptpunkt) der Linse, aber vor dem ersten Brennpunkt, entspricht ein Werth von x_1, der positiv und seinem absoluten Betrage nach kleiner als F ist. Dann ist x_2 ebenfalls positiv und seinem absoluten Betrage nach gröfser als F, d. h. das Bild liegt hinter (dem hinteren Hauptpunkt) der Linse, ist also reell, dabei aufrecht und vergröfsert, letzteres um so mehr, je näher das virtuelle Object an den hinteren, virtuellen, Brennpunkt rückt.

Wenn endlich x_1 negativ wird, d. h. wenn das virtuelle Object hinter dem ersten, hinten gelegenen Brennpunkt liegt, wird auch x_2 negativ. Das virtuelle Bild befindet sich dann vor dem, vorne gelegenen, zweiten Brennpunkt, und ist umgekehrt. Es ist dieser der in dem Galiläi'schen Fernrohr eintretende Fall.

Vierter Abschnitt.

Die Helligkeit der optischen Bilder.

§ 90. Das Reciprocitätsgesetz der Beleuchtungsintensität.

Neben der Lage und der Gröfse der durch centrirte optische Systeme erzeugten Bilder kommt für die praktische Benutzung derselben wesentlich ihre Helligkeit in Betracht.

Um die für die Helligkeit der Bilder geltenden Beziehungen ableiten zu können, müssen wir ein ganz allgemeines Gesetz beachten, welches sich bezieht auf die Stärke der gegenseitigen Beleuchtung zweier verschwindend kleinen Flächenelemente von der Ausdehnung a und b, die sich in einem völlig durchsichtigen Medium in der Entfernung r von einander befinden. Die auf ihnen er-

richteten Normalen mögen mit der sie verbindenden geraden Linie die Winkel α bez. β bilden. Sendet dann a mit der Helligkeit H Licht aus, wo also H die in einer beliebigen Einheit gemessene Lichtmenge bezeichnet, welche von der Flächeneinheit ausgeht, so ist die in derselben Einheit gemessene Lichtmenge L, welche von a auf b fällt

$$L = \frac{H \, . \, a \, . \, b \, . \cos \alpha \, . \cos \beta}{r^2} \tag{384}$$

Da dieser Werth von L nach a und b, sowie nach α und β symmetrisch ist, so ist sofort ersichtlich, dafs dieselbe Lichtmenge von b auf a fallen würde, wenn b mit der Helligkeit H Licht aussenden würde, sonst aber alle Verhältnisse dieselben sind.

Wir wollen uns nun zwischen den beiden Flächenelementen a und b ein centrirtes System brechender Kugelflächen eingeschaltet denken und zugleich der Vereinfachung der Rechnung halber einige besondere Annahmen machen. Erstens mögen beide Flächenelemente a und b senkrecht gegen die Axe dieses Systems gerichtet sein und auch der Axe nahe liegen; es werden dann die beiden in der Gleichung (384) vorkommenden Cosinuswerthe gleich 1. Ferner sollen die Verluste, welche die Strahlen einmal durch Absorption in den verschiedenen Medien und zweitens an den brechenden Flächen dadurch erleiden, dafs neben der Brechung stets auch noch eine Reflexion stattfindet, vernachlässigt werden, und wenn es spiegelnde Flächen sind, die wir ja nach den in § 74 gemachten Auseinandersetzungen als Theile eines brechenden Systems auffassen können, so sollen bei dieser Reflexion die auffallenden Strahlen in voller Intensität zurückgeworfen werden.

Zunächst sei nun vorausgesetzt, dafs b da liege, wo durch das brechende System das Bild von a entworfen wird, und dafs es auch in seiner Gröfse der Gröfse dieses Bildes völlig entspreche. Dann fällt alles Licht, welches von a aus durch die brechenden Flächen dringt, auf b, und umgekehrt fällt alles auf a, was von b aus durch die brechenden Flächen dringt.

Es sei nun in Figur 48 AB die optische Axe des brechenden Systems, H_1 sein erster, H_2 sein zweiter Hauptpunkt; $m m'$ sei der Durchschnitt des von a einfallenden Strahlenbündels in der ersten Hauptebene, $n n'$ derselbe in der zweiten. Die Grundfläche des Strahlenbündels in der ersten Hauptebene ist congruent derselben in der zweiten; ihre gemeinsame Gröfse sei mit Φ bezeichnet. Ist dann H die Helligkeit, mit der a Licht aussendet, so ist nach

Gleichung (384) die Lichtmenge, welche auf die Grundfläche des Strahlenkegels $m m'$ fällt

$$L_1 = \frac{H . a . \Phi}{r_1^2} \tag{385}$$

wenn wir mit r_1 den Abstand des Flächenelementes a von der ersten Hauptebene bezeichnen. Diese Lichtmenge ist aber dieselbe, welche in dem Flächenelemente b zum Bilde von a vereinigt wird.

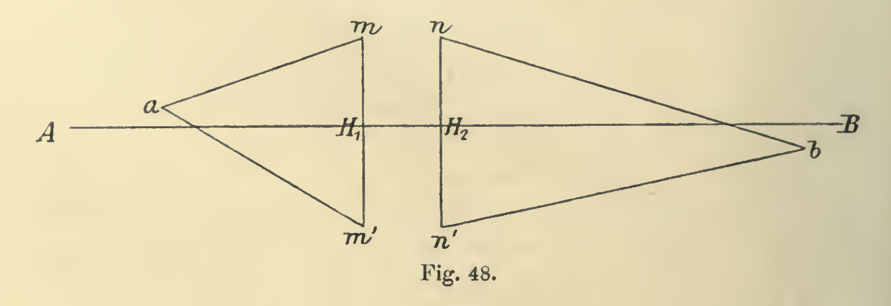


Fig. 48.

Ist nun ein anderes Mal b das mit der Helligkeit H leuchtende Element, so wird in a als dem nunmehrigen Bilde desselben die Lichtmenge

$$L_2 = \frac{H . b . \Phi}{r_2^2} \tag{386}$$

vereinigt, wo r_2 den Abstand des Elementes b von der Hauptebene H_2 bezeichnet.

Es verhält sich demnach

$$L_1 : L_2 = \frac{H . a}{r_1^2} : \frac{H . b}{r_2^2} \tag{387}$$

Da b das Bild von a, und umgekehrt, ist, so folgt aus Gleichung (332a), wenn wir mit F_1 und F_2 die Brennweiten des eingeschalteten optischen Systems bezeichnen und berücksichtigen, dafs a und b als einander geometrisch ähnliche Flächen dem Quadrate ihrer entsprechenden Liniendimensionen proportional sind,

$$\frac{a}{b} = \frac{F_2^2}{(r_2 - F_2)^2} \tag{388}$$

Nach Gleichung (331a) ist nun, wenn wir in sie die jetzigen Bezeichnungen der Brennweiten einführen

$$r_2 - F_2 = \frac{F_1 . r_2}{r_1} .$$

Setzen wir diesen Werth in die vorige Gleichung ein, so ergiebt sich

$$\frac{a}{b} = \frac{F_2^2 \cdot r_1^2}{F_1^2 \cdot r_2^2} \tag{388a}$$

und da nach Gleichung (299)

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

so folgt

$$\frac{a}{b} = \frac{n_2^2 \cdot r_1^2}{n_1^2 \cdot r_2^2} \tag{388b}$$

oder

$$\frac{a}{r_1^2} = \frac{b}{r_2^2} \cdot \frac{n_2^2}{n_1^2} \tag{388c}$$

Setzen wir in das dritte Glied der Proportion (387) diesen Werth ein, so erhalten wir

$$L_1 : L_2 = \frac{b}{r_2^2} \cdot \frac{n_2^2}{n_1^2} : \frac{b}{r_2^2}$$

$$= n_2^2 : n_1^2 \tag{389}$$

Die Lichtmenge, welche also bei gleicher Helligkeit von a ausgehend auf b fällt, verhält sich zu der, welche den umgekehrten Weg macht, wie das Quadrat des Brechungsverhältnisses des Mediums, in dem b liegt, zum Quadrat des Brechungsverhältnisses des Mediums, in dem a liegt. Wären die Helligkeiten demnach nicht dieselben, sondern diejenige von a gleich $n_1^2 . H$, die von b gleich $n_2^2 . H$, so würde L_1 gleich L_2 sein. Sollte eines der Elemente, z. B. a, gröfser sein als das Bild von b, so würden die Theile von a, welche nicht zum Bilde von b gehören, weder Licht auf b werfen, noch von b empfangen können. Es würde dadurch also weder L_1 noch L_2 geändert werden.

Unser Satz gilt aber auch noch, wenn b nicht an den Ort des Bildes von a fällt, sondern in einer andern Ebene liegt. Es sei in Figur 49 b' das Bild von a, während das in Betracht kommende Flächenelement in b liege und einen Theil des senkrecht auf der Axe AB stehenden Querschnittes pp' des Strahlenkegels bilde. Die übrigen Bezeichnungen sind dieselben, wie in Figur 48. Es ist nun wieder die von a ausgehende und auf den Querschnitt mm' auffallende Lichtmenge gleich $\frac{H . a . \Phi}{r_1^2}$. Sie vereinigt sich jetzt aber nicht vollständig auf dem Elemente b, sondern die Licht-

menge, welche auf das Flächenelement b fällt, verhält sich zur ganzen Lichtmenge, welche die Fläche pp' trifft, wie die Oberfläche von b zum Querschnitt des Strahlenkegels in der Ebene pp', den

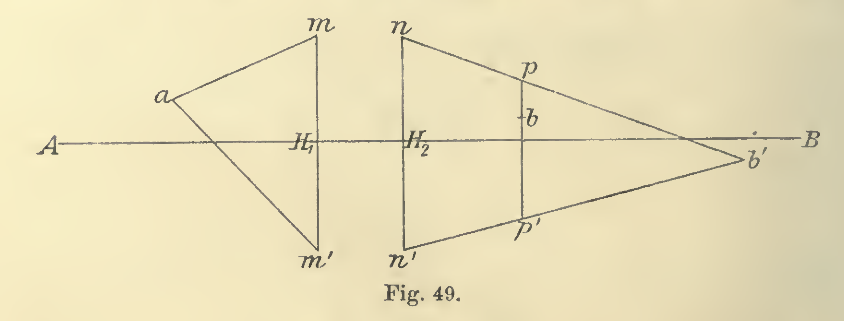


Fig. 49.

wir mit ψ bezeichnen wollen. Die auf b gelangende Lichtmenge L_1 wird also gegeben sein durch

$$L_1 = \frac{\Phi}{\psi} \cdot \frac{H.a.b}{r_1^2} \tag{390}$$

Nun ist aber, wenn wir noch den Abstand von b von dem Hauptpunkt H_2 mit e bezeichnen

$$\frac{\Phi}{\psi} = \frac{(nn')^2}{(pp')^2} = \frac{r_2^2}{(r_2 - e)^2} \tag{391}$$

und daher

$$L_1 = H.a.b.\frac{r_2^2}{(r_2 - e)^2 . r_1^2} \tag{390a}$$

Aus Gleichung (331b) folgt aber für die jetzigen Bezeichnungen

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{F_2^2}{(r_1 - F_1)^2};$$

daher ergiebt sich

$$L_1 = H.a.b.\frac{F_2^2}{(r_2 - e)^2 . (r_1 - F_1)^2}$$

$$= H.a.b.\frac{F_2^2}{(r_1 . r_2 - r_2 . F_1 - e . r_1 + e . F_1)^2} \tag{390b}$$

Da nun ferner nach Gleichung (331a)

$$r_1 . r_2 - r_2 . F_1 = r_1 . F_2$$

so folgt

$$L_1 = H.a.b.\frac{F_2^2}{(r_1 . F_2 - e . r_1 + e . F_1)^2} \tag{390c}$$

Wenn wir nun annehmen, dafs b das mit der Helligkeit H leuchtende Element und a das beleuchtete ist, so erhalten wir auf Grund einer der vorigen ganz analogen Ableitung

$$L_2 = H . a . b . \frac{F_1^2}{(r_1 . F_2 - e . r_1 + e . F_1)^2} \tag{392}$$

Aus den Gleichungen (390c) und (392) folgt nun ohne Weiteres

$$L_1 : L_2 = F_2^2 : F_1^2 \tag{393}$$

Da aber nach Gleichung (299)

$$F_2 : F_1 = n_2 : n_1$$

so ergiebt sich dasselbe Resultat, welches wir schon in Gleichung (389) für den Fall gefunden hatten, dafs b das Bild von a und umgekehrt ist, auch für den Fall, dafs diese Bedingung nicht erfüllt ist, nämlich die Relation

$$L_1 : L_2 = n_2^2 : n_1^2 \tag{393a}$$

Wir können also ganz allgemein folgenden Satz aufstellen: Wenn in einem centrirten brechenden System n_1 das Brechungsverhältnifs des ersten, n_2 das des letzten Mediums ist, und in dem ersten Medium befindet sich senkrecht gegen die Axe gerichtet das Flächenelement a, in dem letzten Medium das Flächenelement b, so fällt ebensoviel Licht von a auf b, wie von b auf a, falls a mit der Helligkeit $n_1^2 . H$ und b mit der Helligkeit $n_2^2 . H$ leuchtet.

Die leuchtende und beleuchtete Fläche brauchen nicht verschwindend klein zu sein, wenn sie nur klein genug sind, dafs die Cosinus der Einfallswinkel der Strahlen an den brechenden Flächen sich nicht merklich von 1 unterscheiden. Denn da für jedes Paar verschwindend kleiner Flächenelemente der beiden Flächen der Satz gilt, so gilt er auch für die ganzen Flächen.

Ist das erste und letzte Medium dasselbe, was ja gewöhnlich bei optischen Instrumenten der Fall ist, da bei ihnen die Luft das erste und letzte Medium bildet, so vereinfacht sich unser Satz dahin, dafs bei gleicher Helligkeit der beiden Flächenelemente dieselbe Lichtmenge von a auf b, wie von b auf a fällt.

§ 91. Die Helligkeit der Bilder auf der Netzhaut.

Wenn man direct oder durch ein centrirtes optisches System ein deutliches Bild eines Gegenstandes erblickt, so können wir das Auge bez. das Auge nebst dem vorgesetzten System als das in dem

vorigen Paragraphen erwähnte optische System betrachten, welches hier ein Bild auf der Netzhaut entwirft. Es sei a ein Flächenelement des Gegenstandes mit der Helligkeit H; ferner sei b sein Bild auf der Netzhaut. Ebensoviel Licht, wie von a nach b geht, würde nach dem vorhin abgeleiteten Reciprocitätsgesetz der Helligkeiten von b nach a gehen, wenn dem Netzhautelemente b die Helligkeit $\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 . H$ ertheilt würde, wobei n_1 das Brechungsverhältnifs des Mediums bezeichnet, in dem sich a befindet, n_2 das Brechungsverhältnifs des Glaskörpers im Auge. Es läfst sich nun aber leicht berechnen, wie grofs diese Lichtmenge M ist. Bezeichnen wir mit q den Querschnitt des überhaupt zur Geltung kommenden, d. h. von den Linsenfassungen, Diaphragmen u. s. w. des optischen Systems nicht abgeblendeten Strahlenbündels in der Pupille und mit d den Abstand der Pupille von der Netzhaut, so ist nach Gleichung (386) die von b ausgehende und auf q auffallende Lichtmenge

$$M = \frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot H \cdot \frac{q \cdot b}{d^2} \tag{394}$$

Streng genommen würde hier unter q der Querschnitt des Strahlenbündels in dem von der Krystalllinse des Auges entworfenen Bilde der Pupille und unter d die Entfernung dieses Bildes von der Netzhaut zu verstehen sein. Die physiologische Optik lehrt uns aber, dafs die hier begangene Abweichung von der streng richtigen Annahme nur sehr gering ist; wir wollen sie daher vernachlässigen.

Dieselbe Lichtmenge M fällt nun aber auch, wie wir im vorigen Paragraphen gesehen haben, umgekehrt von a auf das Netzhautelement b, und es ist demnach die Beleuchtungsstärke, d. h. die Lichtmenge J, welche auf die Flächeneinheit des Netzhautbildes fällt

$$J = \frac{M}{b}$$

$$= \frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot H \cdot \frac{q}{d^2} \tag{395}$$

Sieht das Auge frei den Gegenstand an, so füllt das Strahlenbündel die ganze Pupille, deren Querschnitt Q sei, und die Beleuchtungsstärke J' wird dann

$$J' = \frac{n_2^2}{n_1^2} \cdot H \cdot \frac{Q}{d^2} \tag{396}$$

Es verhält sich also

$$J : J' = q : Q \tag{397}$$

Gröſser als J' kann J niemals werden, da q nicht gröſser als Q werden kann. Das Maximum der Helligkeit des Netzhautbildes ist also durch J' gegeben; es ist die natürliche Helligkeit des Bildes. Die Helligkeit ausgedehnter Flächen kann daher durch optische Instrumente nie gröſser, nur kleiner werden, als ihre natürliche Helligkeit. Wir können demnach folgendes Gesetz aussprechen:

Erblickt ein Beobachter durch ein centrirtes System brechender oder spiegelnder Flächen ein scharfes Bild eines leuchtenden Gegenstandes, und können wir den Lichtverlust an den Flächen vernachlässigen, so erscheint jede Stelle des Bildes dem Beobachter ebenso hell, wie ihm die entsprechende Stelle des Gegenstandes ohne optisches Instrument gesehen erscheinen würde, falls die ganze Pupille des Beobachters von den Strahlen getroffen wird, die von einem einzelnen Punkt jener Stelle ausgehen. Ist diese letztere Bedingung nicht erfüllt, so verhält sich die Helligkeit des optischen Bildes zur Helligkeit des frei gesehenen Gegenstandes, wie der von Strahlen des leuchtenden Punktes getroffene Theil der Pupille zur ganzen Pupille.

Auch wenn Zerstreuungsbilder einer leuchtenden Fläche von gleichmäſsiger Helligkeit im Auge entworfen werden, kann die Helligkeit des Netzhautbildes höchstens gleich, nie gröſser werden, als bei freier Betrachtung der Fläche. Der Beweis hierfür läſst sich in ganz analoger Weise führen, wie für scharf gesehene Bilder, da das im vorigen Paragraphen abgeleitete Reciprocitätsgesetz der Helligkeit sowohl für scharfe Bilder als auch für Zerstreuungsbilder gilt. Auch hier ist die Helligkeit proportional dem Querschnitt des Strahlenbündels in der Pupille, welches von dem entsprechenden Punkte der Netzhaut bis zu der leuchtenden Fläche gelangen kann.

Nur, wenn wir verschwindend kleine leuchtende Punkte durch optische Instrumente betrachten, deren Bild auch bei den stärksten Vergröſserungen nur die Ausdehnung der kleinsten Zerstreuungskreise auf der Netzhaut bedeckt, also immer dieselbe Flächenausdehnung behält, können optische Instrumente die Helligkeit vergröſsern. Dies geschieht z. B. für die Fixsterne, und deshalb können auch Fixsterne durch stark vergröſsernde Fernrohre mit groſser Apertur bei Tage sichtbar gemacht werden. Die scheinbare Helligkeit des Fixsterns steigt proportional der Lichtmenge, welche das Instrument in seinem Focus vereinigt, während die Helligkeit des Himmelsgewölbes durch das Fernrohr nicht vermehrt wird.

§ 92. Grenze der Leistungsfähigkeit optischer Instrumente. Analogie zum Carnot'schen Gesetz.

Die eben durchgeführten Betrachtungen können wir auch an die in § 78 abgeleiteten Sätze über die optische Divergenz anknüpfen und dabei zugleich auf die Grösse der durch das dem Auge vorgesetzte optische Instrument erzeugten Bilder Bezug nehmen. Wenn wir berücksichtigen, dass gewöhnlich das betrachtete Object in demselben Medium liegt, in welchem die Strahlen zum Schluss nach ihrem Durchgang durch das optische Instrument, also vor ihrem Eintritt in das Auge, verlaufen, nämlich in der Luft, so vereinfacht sich die Gleichung (321 d) dadurch, dass die beiden Brechungsverhältnisse n_0 und n_1 einander gleich sind. Es ist dann also

$$\beta_0 \cdot \alpha_0 = \beta_1 \cdot \alpha_1 \tag{398}$$

worin β_0 bez. β_1 die Objectgrösse bez. Bildgrösse, und α_0 bez. α_1 die Divergenzwinkel der äussersten Randstrahlen, welche in das optische Instrument eintreten, bez. aus ihm austreten, bezeichnen. Wir können diese Gleichung umformen in

$$\frac{\beta_1}{\beta_0} = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \tag{398a}$$

Nun giebt der Quotient $\frac{\beta_1}{\beta_0}$ die lineare Vergrösserung des betreffenden optischen Instrumentes an, und es folgt also, dass bei gegebener Vergrösserung α_1 um so grösser sein wird, je grösser α_0, d. h. die Apertur des Instrumentes ist. Das Quadrat von α_1 ist aber proportional dem Querschnitt des Strahlenbündels, welches das Instrument verlässt und in das Auge eintritt. Dieser Querschnitt ist aber wiederum, wie wir im vorigen Paragraphen sahen, proportional der Helligkeit, unter der das Bild β_1 dem beobachtenden Auge erscheint; es ist diese letztere demnach proportional dem Quadrate der Apertur. Es geht daraus hervor, dass, je stärker die Vergrösserung ist, desto grösser das Lichtbündel sein muss, welches von dem Instrument aufgefangen wird, wenn wir ausreichende Helligkeit behalten wollen. Eben deshalb erfordern die stark vergrössernden Fernrohre ausserordentlich grosse Objectivlinsen, und ebenso braucht man für die stark vergrössernden Mikroskope besondere Einrichtungen, durch welche convergirende Lichtkegel erzeugt werden, die durch das Object hindurchgehen und schliesslich mit starker Divergenz in die Objectivlinse hineingelangen. Auf

letzteres zielt die Verbesserung der neueren Mikroskope wesentlich hin.

Der Querschnitt des in die Pupille eintretenden Strahlenbündels läſst sich leicht empirisch ermitteln. Wenn man das Instrument auf ein helles Feld eingestellt hat, entferne man das Auge vom Ocular in Richtung der optischen Axe des Instrumentes und betrachte das Ocular selbst. Man wird in ihm oder etwas vor ihm eine kleine helle Kreisfläche auf dunklem Grunde sehen. Dieser kleine Kreis ist das optische Bild, welches das Ocular von der Fläche der Objectivlinse entwirft. Alles Licht, was durch das Instrument hindurchgeht, muſs in diesem Bildchen des Objectives vereinigt sein. Letzteres entspricht also dem Querschnitt, den die sämmtlichen Lichtkegel, welche von dem Punkte des Objectes ausgegangen sind, an dieser Stelle des Raumes haben. Um nun das gesammte durch das optische Instrument hindurchgegangene Licht mit dem Auge aufzufangen und somit eine möglichst groſse Helligkeit zu erlangen, muſs die Pupille an den Ort dieses Bildchens gebracht werden. Das Verhältniſs zwischen seiner Fläche und der Fläche der Pupille ergiebt also unmittelbar das Verhältniſs, in welchem die Helligkeit des durch das Instrument gesehenen Bildes kleiner ist, als die des direct gesehenen Objectes. Nur wenn jenes Bildchen der Objectivlinse gleich oder gröſser ist als die Pupille, hat man volle Helligkeit.

Aus der oben abgeleiteten Gleichung (398a) folgt aber auch, daſs dieser Querschnitt des aus dem Instrumente austretenden Strahlenbündels bei sonst gleichen Verhältnissen um so kleiner ist, je stärker die Vergröſserung ist. Bei Fernrohren kann man nun die Apertur des Objectivglases theoretisch in das Unbegrenzte steigern. Die Oeffnung des mikroskopischen Lichtkegels dagegen wird durch einen Winkel gemessen und hat daher eine bestimmte Grenze. Es wird also mit steigender Vergröſserung das eben erwähnte kleine Bildchen, durch welches alle Strahlen hindurchmüssen, immer kleiner werden; dabei treten nun Diffractionserscheinungen auf, welche das im Mikroskop erzeugte Bild des betrachteten Objects undeutlich machen und endlich den Nutzen noch stärkerer Vergröſserung wieder völlig vernichten. Dadurch ist der mikroskopischen Vergröſserung eine bestimmte Grenze gesetzt.

Zum Schlusse wollen wir noch darauf hinweisen, daſs das im vorigen Paragraphen abgeleitete Gesetz, daſs durch kein optisches System ein Bild eines Objectes entworfen werden kann, das gröſsere

Helligkeit als das Object selbst besitzt, einen nahen Zusammenhang mit dem CARNOT'schen Gesetze in der Wärmelehre hat.

Dieses Gesetz sagt aus, dafs nur dann Wärme von einem kälteren zu einem heifseren Körper übergeführt werden kann, wenn dabei gleichzeitig Arbeit verrichtet wird. Was hier von der Wärme, also auch den Wärmestrahlen, ausgesagt wird, gilt natürlich ebenfalls von den Lichtstrahlen; und den kälteren bez. wärmeren Körpern sind die dunkleren bez. helleren analog. Da nun ein optisches System keine Arbeit leistet, so ist es nicht möglich, dafs die Lichtstrahlen zu einem Orte hingehen, der heller ist als der Ort, von dem sie herkommen. Das Bild kann also nie heller sein, als das Object.

Sechster Theil.

Die Polarisation und Dispersion des Lichtes.

Erster Abschnitt.

Die Polarisation des Lichtes bei der Spiegelung und Brechung.

---

§ 93. Die magnetischen Schwingungen sind senkrecht zur Einfallsebene.

Indem wir zur Lehre von der Brechung übergingen, hatten wir die Vorstellung zu Grunde gelegt, dafs, wenn Strahlen sich durch ein durchsichtiges Medium fortpflanzen und auf eine Grenzfläche treffen, von dieser Grenzfläche aus nun neue Strahlen ausgehen. Wir haben aber noch die weitere Annahme hinzugefügt, dafs an schmalen Strahlenbündeln keine verschiedenen Phasenänderungen bei der Weiterfortpflanzung der reflectirten oder gebrochenen Strahlen vorkommen sollten. Nun hängen mit diesen Erscheinungen der Spiegelung und Brechung der Strahlen aber noch wesentlich andere Erscheinungen zusammen, welche die Art der Strahlen betreffen. Die Strahlen werden nämlich durch Spiegelung und Brechung gleichzeitig mehr oder weniger polarisirt. Wir müssen die Vorgänge der Spiegelung und der Brechung in dieser Hinsicht noch näher untersuchen.

Zu diesem Behufe wollen wir auf die ursprünglichen Gleichungen (30) und (31) zurückgehen, welche wir über die Bewegung der Lichtwellen aufgestellt haben. Statt der Momente sollen aber die Kraftcomponenten der magnetischen und elektrischen Kräfte eingeführt werden:

$$\left.\begin{aligned} A.\mu.\frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\ A.\mu.\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\ A.\mu.\frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \end{aligned}\right\} \quad (399)$$

und

$$\left.\begin{aligned} A.\varepsilon.\frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\ A.\varepsilon.\frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\ A.\varepsilon.\frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (400)$$

Wir müssen nun den Fall untersuchen, dafs ein Wellensystem in einer schrägen Richtung gegen die Grenzfläche zweier durchsichtigen Medien läuft, in denen die Gröfsen ε und μ, sowie die magnetischen und elektrischen Kräfte verschieden sein können. Der Einfallswinkel werde (Fig. 50) mit α bezeichnet. Wir wissen nun schon, dafs an der Grenzfläche reflectirte Wellen entstehen, die in der Richtung der reflectirten Strahlen also unter einem Winkel, der dem Einfallswinkel gleich ist, hinauslaufen, und dafs gebrochene Wellen in der Richtung, die mit dem Einfallsloth den Winkel β bildet, in das zweite Medium eintreten. Beim Uebergang in ein neues ruhendes durchsichtiges Medium kann die Schwingungsdauer nicht geändert werden. Denn soviel Anstöfse neuer Wellen, als in der Zeiteinheit an der Fläche ankommen, so viel werden auch in derselben Zeit ausgeübt, um Wellenzüge der gebrochenen Strahlen und Wellenzüge der gespiegelten Strahlen zu erregen. Durch den Factor e^{int}, welcher für alle diese verschiedenen Bewegungen der gleiche sein soll, drücken wir aus, dafs n Schwingungsanstöfse in der Zeit 2π geschehen. Andererseits aber wissen wir nun, dafs die Function, welche wir brauchen können, um den Wellengleichungen zu genügen, für ebene Wellen eine Function von $t - \frac{s}{c}$ sein mufs, wo s der von der Welle zurückgelegte Weg von irgend einem Nullpunkt an gerechnet und c die entsprechende Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist. Wählen wir nun den Coordinatenanfangspunkt (Fig. 50)

zum Nullpunkt, von dem der zurückgelegte Weg der Welle gerechnet wird, so wird für die einfallenden Wellen

$$s = -x.\cos\alpha + y.\sin\alpha,$$

für die reflectirten Wellen

$$s = x.\cos\alpha + y.\sin\alpha$$

und für die gebrochenen Wellen

$$s = -x.\cos\beta + y.\sin\beta$$

zu setzen sein.

Die einfallenden Wellen sind demnach durch die Form

$$\mathfrak{A}.e^{in\left[t - \frac{y.\sin\alpha}{c_1} + \frac{x.\cos\alpha}{c_1}\right]},$$

die reflectirten durch

$$\mathfrak{B}.e^{in\left[t - \frac{y.\sin\alpha}{c_1} - \frac{x.\cos\alpha}{c_1}\right]}$$

und die gebrochenen durch

$$\mathfrak{C}.e^{in\left[t - \frac{y.\sin\beta}{c_2} + \frac{x.\cos\beta}{c_2}\right]}$$

ausgedrückt. In diesen Formen sind auch mögliche Phasenänderungen der reflectirten oder gebrochenen Welle gegen die einfallende enthalten, die als imaginärer Factor zu der Amplitude $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{C}$ gerechnet werden können.

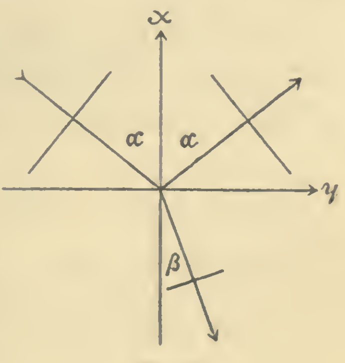


Fig. 50.

Wir wollen nun zunächst annehmen, dafs die magnetischen Oscillationen nur in Richtung der z-Coordinaten stattfinden, d. h. senkrecht zur Ebene der Zeichnung (Fig. 50). Im oberen Medium liegen die Bewegungen der einfallenden und der reflectirten Wellen. Wir haben also hier für die z-Componente der magnetischen Kraft zu setzen:

$$N = \mathfrak{A}.e^{in\left[t - \frac{y.\sin\alpha}{c_1} + \frac{x.\cos\alpha}{c_1}\right]} + \mathfrak{B}.e^{in\left[t - \frac{y.\sin\alpha}{c_1} - \frac{x.\cos\alpha}{c_1}\right]} \quad (401)$$

Im unteren Medium, wo die z-Componente der magnetischen Kraft mit N' bezeichnet werden möge, haben wir

$$N' = \mathfrak{C}.e^{in\left[t - \frac{y.\sin\beta}{c_2} + \frac{x.\cos\beta}{c_2}\right]}. \quad (402)$$

Erfahrungsgemäfs kennen wir keine anderen sich fortpflanzenden Wellen, als diese, und wir werden uns überzeugen, dafs dies in der That eine vollständige Lösung giebt, für welche wir alle Bedingungsgleichungen erfüllen können. Da die magnetischen Bewegungen senkrecht zur Ebene der Zeichnung sind, so werden die elektrischen Bewegungen in dieser Ebene liegen müssen. Denn wenn wir nur N als vorkommende magnetische Oscillation betrachten, wie wir es bisher gethan haben, und daher L und M gleich Null setzen, so folgt aus der letzten der Gleichungen (400), dafs auch $\frac{\partial Z}{\partial t} = 0$ sein mufs, d. h. dafs keine elektrische Oscillation senkrecht zur Ebene der Zeichnung vorkommen kann. Andererseits reduciren sich, wenn wir L und M gleich Null setzen, die ersten beiden der Gleichungen (400) auf

$$A \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y}$$

und

$$A \cdot \varepsilon \cdot \frac{\partial Y}{\partial t} = -\frac{\partial N}{\partial x}$$

Wir haben also zunächst zu bilden:

$$\left.\begin{aligned} A \cdot \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} = &- \mathfrak{A} \cdot \frac{i \cdot n \cdot \sin\alpha}{c_1} \cdot e^{in\left[t - \frac{y}{c_1}\sin\alpha + \frac{x \cdot \cos\alpha}{c_1}\right]} \\ &- \mathfrak{B} \cdot \frac{i \cdot n \cdot \sin\alpha}{c_1} \cdot e^{in\left[t - \frac{y}{c_1}\sin\alpha - \frac{x \cdot \cos\alpha}{c_1}\right]} \end{aligned}\right\} \quad (403)$$

und ebenso für das zweite Medium

$$A \cdot \varepsilon_2 \frac{\partial X'}{\partial t} = \frac{\partial N'}{\partial y} = - \mathfrak{C} \cdot \frac{i \cdot n \sin\beta}{c_2} \cdot e^{in\left[t - \frac{y}{c_2}\sin\beta + \frac{x \cdot \cos\beta}{c_2}\right]} \quad (404)$$

Durch Integration nach t ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} X = &- \frac{\mathfrak{A}}{A\varepsilon_1} \cdot \frac{\sin\alpha}{c_1} \cdot e^{in\left[t - \frac{y}{c_1}\sin\alpha + \frac{x \cdot \cos\alpha}{c_1}\right]} \\ &- \frac{\mathfrak{B}}{A\varepsilon_1} \cdot \frac{\sin\alpha}{c_1} \cdot e^{in\left[t - \frac{y}{c_1}\sin\alpha - \frac{x \cdot \cos\alpha}{c_1}\right]} \end{aligned}\right\} \quad (403\text{a})$$

und

$$X' = -\frac{\mathfrak{C}}{A\varepsilon_2} \cdot \frac{\sin\beta}{c_2} \cdot e^{in\left[t - \frac{y}{c_2}\sin\beta + \frac{x \cdot \cos\beta}{c_2}\right]} \quad (404\text{a})$$

Eine bei der Integration nach t hinzuzufügende von t unabhängige Gröfse ist für die Schwingungen ohne Belang.

In derselben Weise können wir Y bilden nach der Gleichung $A\varepsilon\frac{\partial Y}{\partial t} = -\frac{\partial N}{\partial x}$ und erhalten für das erste Medium:

$$\left.\begin{aligned} A.\varepsilon_1\frac{\partial Y}{\partial t} &= -\mathfrak{A}.\frac{i.n.\cos\alpha}{c_1}.e^{in\left[t-\frac{y.\sin\alpha}{c_1}+\frac{x.\cos\alpha}{c_1}\right]} \\ &+\mathfrak{B}.\frac{i.n.\cos\alpha}{c_1}.e^{in\left[t-\frac{y.\sin\alpha}{c_1}-\frac{x.\cos\alpha}{c_1}\right]} \end{aligned}\right\} \tag{405}$$

und für das zweite Medium

$$A.\varepsilon_2.\frac{\partial Y'}{\partial t} = -\mathfrak{C}.\frac{i.n.\cos\beta}{c_2}.e^{in\left[t-\frac{y.\sin\beta}{c_2}+\frac{x.\cos\beta}{c_2}\right]}. \tag{406}$$

Indem wir nach der Zeit integriren ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} A.\varepsilon_1.Y &= -\mathfrak{A}.\frac{\cos\alpha}{c_1}.e^{in\left[t-\frac{y.\sin\alpha}{c_1}+\frac{x.\cos\alpha}{c_1}\right]} \\ &+\mathfrak{B}.\frac{\cos\alpha}{c_1}.e^{in\left[t-\frac{y.\sin\alpha}{c_1}-\frac{x.\cos\alpha}{c_1}\right]} \end{aligned}\right\} \tag{405a}$$

und

$$A.\varepsilon_2.Y' = -\mathfrak{C}.\frac{\cos\beta}{c_2}.e^{in\left[t-\frac{y.\sin\beta}{c_2}+\frac{x.\cos\beta}{c_2}\right]} \tag{406a}$$

Nun sind unsere Grenzbedingungen dadurch gegeben, dafs an der Grenze $x = 0$ die Werthe der Differentialquotienten nach x, also quer durch diese Grenze hindurch, nicht unendlich werden dürfen. Denn da

$$A.\varepsilon.\frac{\partial Y}{\partial t} = -\frac{\partial N}{\partial x},$$

so würde ein unendlicher Werth von $\frac{\partial N}{\partial x}$ bedingen, dafs in der Grenzfläche eine plötzliche Aenderung in den Werthen von Y eintreten müfste, was nicht vorstellbar wäre. Wir schliefsen also aus dieser Gleichung, dafs an der Grenzfläche von N zu N' von der Function, die auf der oberen, zu der, die auf der unteren Seite gilt, kein Sprung stattfinden dürfe, und dafs also an der Grenzfläche $N = N'$ zu setzen sei.

Ebenso folgt aus der Gleichung

$$A\mu\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

dafs $\frac{\partial Y}{\partial x}$ endlich ist, dafs also der Werth der Function Y an der Grenze keinen Sprung machen darf, mithin $Y = Y'$ sein mufs.

Das sind unsere beiden Grenzbedingungen, und zwar ist es ein wesentlicher Vortheil der elektromagnetischen Theorie des Lichtes, dafs wir in der That hier nur zwei Grenzbedingungen bekommen. Es ist die elektromagnetische Theorie vereinbar mit der Annahme, dafs die X-Componente an der Grenze einen Sprung macht, weil nämlich in dieser Theorie die Möglichkeit gegeben ist, dafs an der Grenze der beiden Medien für einen Moment während der Schwingung sich eine elektrische Grenzschicht bildet, durch die dann die Componente X an beiden Seiten der Schicht verschiedene Werthe bekommen würde. Denn an der Oberfläche eines elektrischen Leiters, wo eine Flächenbelegung sich bildet, macht die normal gerichtete Componente der Kraft einen Sprung. Bei der Annahme elastischer Undulationen des Lichtäthers tritt hingegen in dieser Beziehung eine Schwierigkeit ein, welche ohne neue Hypothesen nicht beseitigt werden kann; denn da hat man an der Grenze zweier elastischen Körper die Bedingungen, sowohl dafs die Grenzverschiebungen einander in beiden Medien derart entsprechen müssen, dafs keine Verschiebungen senkrecht zur Fläche vorkommen, als auch dafs die drei Kraftcomponenten, welche hier an der Fläche auf die Grenzfläche einwirken, gleiche Gröfse haben, weil in der Grenzfläche selbst keine endliche Gegenkraft gegen diejenigen Kräfte auftreten kann, welche aus dem Medium her gegen die Grenzfläche wirken. Man bekommt dadurch mehr Bedingungen, als man ohne neue Annahmen erfüllen kann.

Die Gleichungen $N = N'$ und $Y = Y'$ müfsen zu jeder Zeit und für jeden Werth von y stimmen. Das ist nicht anders möglich, als wenn die in den Ausdrücken für N und N' und für Y und Y' vorkommenden Exponentialgröfsen für $x = 0$ identisch werden. Das liefert uns die Gleichung, die schon das Brechungsgesetz verlangt, nämlich:

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2},$$

die also nichts anderes bedeutet, als dafs die Spur jeder Welle längs der Grenze in den beiden Medien mit gleicher Geschwindigkeit fortschreitet. Aufserdem verlangt die Gleichung $N = N'$, dafs

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C} \tag{407}$$

und die Gleichung $Y = Y'$, dafs

$$\frac{\mathfrak{A} . \cos \alpha}{A . \varepsilon_1 c_1} - \frac{\mathfrak{B} . \cos \alpha}{A . \varepsilon_1 c_1} = \frac{\mathfrak{C} . \cos \beta}{A . \varepsilon_2 c_2} . \tag{408}$$

Wenn also $\mathfrak{A}$, die Amplitude des einfallenden Strahles, gegeben ist, so werden sich aus diesen beiden linearen Gleichungen die beiden Coefficienten $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ bestimmen lassen. Durch Elimination von $\mathfrak{C}$ bekommen wir:

$$\mathfrak{A} . \left[\frac{\cos \beta}{A . \varepsilon_2 c_2} - \frac{\cos \alpha}{A . \varepsilon_1 c_1}\right] + \mathfrak{B} . \left[\frac{\cos \beta}{A . \varepsilon_2 c_2} + \frac{\cos \alpha}{A . \varepsilon_1 c_1}\right] = 0 . \tag{409}$$

Diese Gleichung drückt die Amplitüde des gespiegelten Strahles durch die Amplitude des einfallenden Strahles aus.

Unter bestimmten Umständen kann $\mathfrak{B} = 0$ werden, nämlich wenn

$$\frac{\cos \beta}{\varepsilon_2 c_2} = \frac{\cos \alpha}{\varepsilon_1 c_1} \tag{410}$$

Dann wird also ein einfallender Strahl vorhanden sein können, ohne dafs ein gespiegelter Strahl sich bildet. In der That zeigt sich bei der Untersuchung der Erscheinungen, dafs ein solcher Fall vorkommt, wo kein gespiegelter Strahl sich bildet, sondern die ganze Lichtmenge in das andere Medium übergeht.

Nun hatten wir früher gesehen, dafs das Quadrat der Fortpflanzungsgeschwindigkeit dem Producte $\varepsilon \mu$ umgekehrt proportional ist. Bei allen bisher untersuchten vollkommen durchsichtigen Körpern ist die magnetische Constante μ immer sehr wenig abweichend von derjenigen in der Luft oder im leeren Raume. Man kann also die reciproken Quadrate $\frac{1}{c_1^2}$ und $\frac{1}{c_2^2}$ den Dielektricitätsconstanten ε_1 und ε_2 annähernd proportional setzen. Dadurch geht die Gleichung (409) in die Form über:

$$\mathfrak{A} . \left[c_2 . \cos \beta - c_1 . \cos \alpha\right] + \mathfrak{B} . \left[c_2 . \cos \beta + c_1 . \cos \alpha\right] = 0. \tag{409a}$$

Indem wir die einzelnen Glieder mit $\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2}$ multipliciren, ergiebt sich

$$\mathfrak{A} . \left[\cos \beta . \sin \beta - \cos \alpha . \sin \alpha\right] + \mathfrak{B} . \left[\cos \beta . \sin \beta + \cos \alpha . \sin \alpha\right] = 0$$

oder

$$\mathfrak{A} . \left[\sin 2\alpha - \sin 2\beta\right] = \mathfrak{B} . \left[\sin 2\alpha + \sin 2\beta\right] . \tag{409b}$$

Es verschwindet $\mathfrak{B}$ also, wenn $2\alpha + 2\beta = \pi$ ist; denn dann ist $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. In diesem Falle ergänzen sich α und β zu einem Rechten. Dies ist, wie aus der Fig. 51 unmittelbar zu ersehen ist, gleichbedeutend mit der bekannten empirisch gefundenen Bedingung, daſs der gebrochene Strahl auf dem gespiegelten Strahl senkrecht stehen muſs, wenn kein reflectirter Strahl bestehen soll. Der betreffende Winkel α heiſst der Polarisationswinkel.

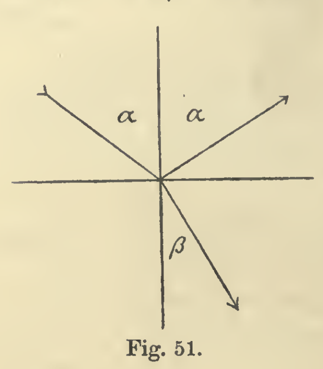


Fig. 51.

§ 94. Die elektrischen Schwingungen sind senkrecht zur Einfallsebene.

Wenn wir die Rollen der elektrischen und magnetischen Schwingungen vertauschen und festsetzen, daſs die elektrischen Schwingungen senkrecht zu der Einfallsebene des Strahles sind, so werden ganz analoge Gleichungen daraus folgen; nur müssen wir das Zeichen ε für die dielektrische Constante mit dem Zeichen μ für die magnetische Constante vertauschen.

Setzen wir nämlich in dem ersten Medium

$$Z = \mathfrak{A} \,.\, e^{in\left[t - \frac{y\,.\,\sin\alpha}{c_1} + \frac{x\,.\,\cos\alpha}{c_1}\right]} + \mathfrak{B} \,.\, e^{in\left[t - \frac{y\,.\,\sin\alpha}{c_1} - \frac{x\,.\,\cos\alpha}{c_1}\right]} \tag{411}$$

und in dem zweiten Medium

$$Z' = \mathfrak{C} \,.\, e^{in\left[t - \frac{y\,.\,\sin\beta}{c_2} + \frac{x\,.\,\cos\beta}{c_2}\right]}, \tag{412}$$

während X und Y Null sind, so erhalten wir in Folge der Gleichungen (399)

$$\left.\begin{aligned} A\mu_1 \frac{\partial L}{\partial t} &= in \frac{\sin\alpha}{c_1} \mathfrak{A} \,.\, e^{in\left[t - \frac{y\,.\,\sin\alpha}{c_1} + \frac{x\,.\,\cos\alpha}{c_1}\right]} \\ &\quad + in \frac{\sin\alpha}{c_1} \mathfrak{B} \,.\, e^{in\left[t - \frac{y\,.\,\sin\alpha}{c_1} - \frac{x\,.\,\cos\alpha}{c_1}\right]} \\ A\mu_1 \frac{\partial M}{\partial t} &= in \frac{\cos\alpha}{c_1} \mathfrak{A} \,.\, e^{in\left[t - \frac{y\,.\,\sin\alpha}{c_1} + \frac{x\,.\,\cos\alpha}{c_1}\right]} \\ &\quad - in \frac{\cos\alpha}{c_1} \mathfrak{B} \,.\, e^{in\left[t - \frac{y\,.\,\sin\alpha}{c_1} - \frac{x\,.\,\cos\alpha}{c_1}\right]} \end{aligned}\right\} \tag{413}$$

und

$$\left.\begin{aligned} A\mu_2 \frac{\partial L'}{\partial t} &= i n \frac{\sin\beta}{c_2} \mathfrak{C} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\beta}{c_2} + \frac{x . \cos\beta}{c_2}\right]} \\ A\mu_2 \frac{\partial M'}{\partial t} &= i n \frac{\cos\beta}{c_2} \mathfrak{C} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\beta}{c_2} + \frac{x . \cos\beta}{c_2}\right]} \end{aligned}\right\} \qquad (414)$$

Durch Integration nach t ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} A\mu_1 L = {} & \frac{\sin\alpha}{c_1} \mathfrak{A} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\alpha}{c_1} + \frac{x . \cos\alpha}{c_1}\right]} \\ & + \frac{\sin\alpha}{c_1} \mathfrak{B} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\alpha}{c_1} - \frac{x . \cos\alpha}{c_1}\right]} \\ A\mu_1 M = {} & \frac{\cos\alpha}{c_1} \mathfrak{A} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\alpha}{c_1} + \frac{x . \cos\alpha}{c_1}\right]} \\ & - \frac{\cos\alpha}{c_1} \mathfrak{B} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\alpha}{c_1} - \frac{x . \cos\alpha}{c_1}\right]} \end{aligned}\right\} \qquad (413a)$$

und

$$\left.\begin{aligned} A\mu_2 L' &= \frac{\sin\beta}{c_2} \mathfrak{C} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\beta}{c_2} + \frac{x . \cos\beta}{c_2}\right]} \\ A\mu_2 M' &= \frac{\cos\beta}{c_2} \mathfrak{C} . e^{i n\left[t - \frac{y . \sin\beta}{c_2} + \frac{x . \cos\beta}{c_2}\right]} \end{aligned}\right\} \qquad (414a)$$

Den Gleichungen (407) und (408) entsprechend erhalten wir hier aus den Grenzbedingungen $Z = Z'$ und $M = M'$:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} &= \mathfrak{C} \\ \frac{\mathfrak{A} . \cos\alpha}{A . \mu_1 c_1} - \frac{\mathfrak{B} . \cos\alpha}{A . \mu_1 c_1} &= \frac{\mathfrak{C} . \cos\beta}{A . \mu_2 c_2}, \end{aligned}\right\} \qquad (415)$$

die sich von jenen nur dadurch unterscheiden, dafs μ an die Stelle von ε getreten ist.

Schon oben haben wir hervorgehoben, dafs bei allen uns bekannten vollkommen durchsichtigen Körpern μ nahe gleich 1 gesetzt werden kann. Wir wollen daher auch hier wieder μ_1 gegen μ_2 fortheben und bleiben dabei immer noch in hinreichender Uebereinstimmung mit der Wirklichkeit. Dividiren wir dann die zweite Gleichung (415) durch

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2},$$

so bekommen wir

$$\mathfrak{A} . \operatorname{cotg}\alpha - \mathfrak{B} . \operatorname{cotg}\alpha = \mathfrak{C} . \operatorname{cotg}\beta.$$

Setzt man hierin für $\mathfrak{C}$ die Summe $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ein, so ergiebt sich

$$\mathfrak{A} \cdot \left[\operatorname{cotg} \beta - \operatorname{cotg} \alpha\right] + \mathfrak{B} \cdot \left[\operatorname{cotg} \beta + \operatorname{cotg} \alpha\right] = 0 \tag{416}$$

oder

$$\mathfrak{A} \cdot \sin(\alpha - \beta) + \mathfrak{B} \cdot \sin(\alpha + \beta) = 0, \tag{416a}$$

so dafs also die beiden Amplituden des einfallenden und des gespiegelten Strahls sich verhalten wie der Sinus der Differenz zum Sinus der Summe von α und β. Das Verhältniss $\mathfrak{B}$ dividirt durch $\mathfrak{A}$ kann niemals verschwinden, weil $\sin(\alpha - \beta)$ nur für $\alpha = \beta = 0$ verschwindet, wo zugleich $\sin(\alpha + \beta)$ verschwindet und $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ den Werth $\frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2}$ annimmt. Wenn also die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind, wird das zurückgeworfene Licht niemals ausgelöscht.

Fallen beide Arten von Strahlen, solche deren magnetische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind und solche, deren elektrische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind, unter dem Polarisationswinkel auf, so wird nur die erste Art ausgelöscht und dasjenige Licht, dessen elektrische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind, wird allein zurückgeworfen. Durch die Spiegelung wird also in diesem Falle unpolarisirtes Licht polarisirt und in dem polarisirten Licht sind die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene oder zur sogenannten Polarisationsebene, die magnetischen Schwingungen liegen in der Polarisationsebene.

§ 95. Die totale Reflexion.

Ausser dem bisher betrachteten Fall, wo wir einen reflectirten und einen gebrochenen Strahl erhalten, kann auch der Fall der sogenannten totalen Reflexion eintreten, wo nach dem Brechungsgesetze ein gebrochener Strahl sich nicht bilden kann. Das Brechungsgesetz sagt aus, dafs

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2}.$$

Wenn die Lichtgeschwindigkeit im ersten Medium kleiner ist als im zweiten, dann ist es nicht immer möglich, für einen gegebenen Werth von α einen Werth für β zu finden. Es kann nämlich der Fall vorkommen, dafs der nach diesem Gesetz berechnete Werth von $\sin \beta$ gröfser als 1 werden müfste, während der Sinus eines reellen Winkels immer zwischen den Werthen $+ 1$ und $- 1$ liegt. Wohl

aber kann man dann einen complexen Werth für β angeben. Denn es ist:

$$\sin\left[xi + \frac{\pi}{2}\right] = \sin xi \,.\, \cos\frac{\pi}{2} + \cos xi \,.\, \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \cos xi = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Das ist eine Gröfse, welche für reelle Werthe von x alle Werthe zwischen $+1$ und $+\infty$ annimmt, so dafs also Sinus welche gröfser sind als 1, dargestellt werden können durch den Sinus eines rein imaginären Winkels, zu dem aber noch der Winkel $\frac{\pi}{2}$ hinzukommt. Das macht es nun möglich, in dem Fall der totalen Reflexion gerade so zu verfahren, wie bei der mit Brechung verbundenen Reflexion. Dieselben Formeln stellen auch in diesem Fall die auftretenden Oscillationen dar. Ebenso wie

$$\sin\left[xi + \frac{\pi}{2}\right] = \cos xi$$

ergiebt sich

$$\cos\left[xi + \frac{\pi}{2}\right] = -\sin xi = \frac{e^x - e^{-x}}{2i}.$$

Statt $\sin\beta$ wollen wir die Bezeichnung

$$\sin\beta = p$$

einführen. Dieses p ist in dem Fall, den wir hier zu untersuchen haben, gröfser als 1. Dann ist

$$\cos\beta = \pm\sqrt{1 - p^2}$$

und da $p > 1$ sein soll, so ist der Werth dieses Cosinus ein imaginärer. Wir wollen schreiben

$$\cos\beta = \pm\sqrt{1 - p^2} = \pm i \,.\, q.$$

Wenn die magnetischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind, erhält der Ausdruck für N' in Gleichung (402) nunmehr die Form:

$$\left.\begin{aligned} N' &= \mathfrak{C} \,.\, e^{in\left[t - \frac{y.p}{c_2}\right]} \,.\, e^{\frac{\pm inxiq}{c_2}} \\ &= \mathfrak{C} \,.\, e^{in\left[t - \frac{y.p}{c_2}\right]} \,.\, e^{\frac{\mp nxq}{c_2}}. \end{aligned}\right\} \quad (417)$$

Wir erhalten hier also eine Exponentialfunction mit reellem Exponenten, dessen Zeichen noch zwei Möglichkeiten zuläfst. In diesem

Falle werden wir berücksichtigen müssen, dafs die Oscillation, welche sich an der Grenze ausbilden kann, ihre Anstöfse nur von der Grenze aus erhält, und sich in das zweite Medium nicht weit fortpflanzt. Wir wählen daher das positive Zeichen, damit im zweiten Medium, wo x negativ ist, auch der Exponent negative Werthe erhält. Dann zeigt der Factor $e^{\frac{nxq}{c_2}}$ ein System erlöschender Wellen an, welche für grofse negative Werthe von x verschwinden, und würde besagen, dafs in der Nähe der Grenzfläche des Mediums eine Bewegung über die Grenzfläche zwar hinüber greift, aber aus erlöschenden Wellen besteht. In der That erlöschen sie sehr rasch, weil $\frac{n}{c_2}$ einen grofsen Werth hat. Denn n ist ja die Zahl der Schwingungen in der Zeit 2π und daher ist $\frac{2\pi c_2}{n}$ die Wellenlänge. Es braucht also $-x$ nur gleich einer Wellenlänge zu sein, um dem Exponenten schon den Werth $-2\pi q$ zu geben. Die Erschütterung kommt also merklich nur in den äufsersten Grenzschichten des zweiten Mediums vor.

Sonst bestehen alle die Bedingungen, welche wir schon vorher erörtert haben. An der Grenze ist wieder $N = N'$, also:

$$\mathfrak{A} \cdot e^{in\left[t - \frac{\sin\alpha}{c_1} y\right]} + \mathfrak{B} \cdot e^{in\left[t - \frac{\sin\alpha}{c_1} y\right]} = \mathfrak{C} \cdot e^{in\left[t - \frac{p}{c_2} y\right]}. \tag{418}$$

Daraus folgt erstens

$$\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{p}{c_2}. \tag{419}$$

Es hat also p den berechneten Werth, den $\sin\beta$ nach dem Brechungsgesetz haben müfste, obgleich hier keine gebrochenen Wellen, die sich dauernd fortpflanzen, zu Stande kommen. Zweitens folgt wieder die Gleichung

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \mathfrak{C}. \tag{420}$$

Ferner mufs ebenso wie oben an der Grenze $Y = Y'$ sein und das giebt der Gleichung (408) entsprechend:

$$\frac{\mathfrak{A} \cdot \cos\alpha}{c_1 \cdot A \cdot \varepsilon_1} - \frac{\mathfrak{B} \cdot \cos\alpha}{c_1 \cdot A \cdot \varepsilon_1} = \frac{\mathfrak{C} \cdot \cos\beta}{c_2 \cdot A \cdot \varepsilon_2} = -i \frac{\mathfrak{C} \cdot q}{c_2 \cdot A \cdot \varepsilon_2}. \tag{421}$$

Durch Elimination von $\mathfrak{C}$ erhalten wir

$$\mathfrak{A} \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{A \cdot c_1\, \varepsilon_1} + \frac{iq}{A \cdot c_2\, \varepsilon_2}\right) = \mathfrak{B} \cdot \left(\frac{\cos\alpha}{A \cdot c_1\, \varepsilon_1} - \frac{iq}{A \cdot c_2\, \varepsilon_2}\right) \tag{422}$$

Das ist eine Gleichung, in der die Coefficienten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ complex sind, und sich nur durch verschiedene Zeichen des imaginären Theils unterscheiden, so dafs der Modulus der complexen Gröfsen den gleichen Werth hat. Bestimmen wir zwei Gröfsen r und ω, so dafs:

$$\frac{\cos\alpha}{A\,.\,c_1\,\varepsilon_1} = r\cos\omega \quad \text{und} \quad \frac{q}{A\,.\,c_2\,\varepsilon_2} = r\sin\omega$$

und daher

$$\frac{q\,c_1\,\varepsilon_1}{c_2\,\varepsilon_2\,.\,\cos\alpha} = \operatorname{tg}\omega$$

ist, so wird

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,.\,e^{2i\omega} \tag{422a}$$

Es ist also dann der Modulus der complexen Gröfsen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ für beide gleich, d. h. die Amplitude des gespiegelten Strahles ist gleich der des einfallenden Strahles; es wird alles Licht mit voller Intensität reflectirt, und es bildet sich kein fortgesetzter gebrochener Strahl. Daher bezeichnet man diesen Fall als Fall der totalen Reflexion. Die Gleichung $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,.\,e^{2i\omega}$ zeigt an, dafs wir es hier mit einer Phasenänderung 2ω zu thun haben. Die Phase des einfallenden Strahles wird bei der Reflexion um 2ω verändert.

Ganz ebenso läfst sich der Fall behandeln, wo die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind. Da erhalten wir entsprechend den Gleichungen (415) jetzt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} + \mathfrak{B} &= \mathfrak{C} \\ \frac{\mathfrak{A}\,.\cos\alpha}{A\,\mu_1\,c_1} - \frac{\mathfrak{B}\,.\cos\alpha}{A\,\mu_1\,c_1} &= -\frac{\mathfrak{C}\,.\,q\,i}{A\,\mu_2\,c_2} \end{aligned}\right\} \tag{423}$$

und durch Elimination von $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\cos\alpha}{A\,\mu_1\,c_1} + \frac{q\,i}{A\,\mu_2\,c_2}\right) = \mathfrak{B}\left(\frac{\cos\alpha}{A\,\mu_1\,c_1} - \frac{q\,i}{A\,\mu_2\,c_2}\right). \tag{424}$$

Die complexen Gröfsen rechts und links unterscheiden sich wieder nur durch das Zeichen von i und haben daher den gleichen Modulus, so dafs wieder wie oben sich eine Gleichung von der Form

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\,.\,e^{2i\omega} \tag{424a}$$

ergiebt. Die Phasenänderung 2ω ist aber für diese zweite Art von Strahlen eine andere. Hier ist $\operatorname{tg}\omega = \frac{q\,\mu_1\,c_1}{\mu_2\,c_2\cos\alpha}$, während für die erste Art von Strahlen $\operatorname{tg}\omega = \frac{q\,\varepsilon_1\,c_1}{\varepsilon_2\,c_2\cos\alpha}$ war. Ist das einfallende

Licht aus Strahlen beider Arten zusammengesetzt, so wird die Reflexion eine solche sein, dafs die beiden reflectirten Strahlen verschiedene Phasenänderung erleiden, und dafs also nach der Reflexion der eine Strahl mit seiner Phase gegen den anderen verschoben sein wird. Wenn zwei Strahlen dieser Art, welche gegen einander verschobene Phasen haben, zusammentreffen, so combiniren sie sich zu sogenanntem elliptisch polarisirten Licht.

§ 96. Elliptisch polarisirtes Licht.

Es seien die Oscillationen darzustellen, die an irgend einer Stelle des Raumes durch eine beliebige Anzahl von Strahlen gleicher Schwingungsdauer hervorgebracht werden. Wenn wir die Componenten nicht wie früher durch complexe Ausdrücke von der Gestalt $A e^{int}$, sondern in reeller Form schreiben, so wird jede Componente der elektrischen oder magnetischen Schwingung sich aus einer Summe von Cosinus-Functionen zusammensetzen lassen, z. B.:

$$X = \sum \left[A_p \cdot \cos(nt + \alpha_p)\right],$$

wo n in allen Gliedern das gleiche ist, die Amplitude A_p und die Phasenconstanten α_p dagegen verschiedene Werthe haben können. Ebenso erhalten wir für Y und Z

$$Y = \sum \left[B_p \cdot \cos(nt + \beta_p)\right]$$

$$Z = \sum \left[C_p \cdot \cos(nt + \gamma_p)\right].$$

Indem man $\cos(nt + \alpha_p)$ zerlegt, erhält man

$$X = \cos nt \cdot \sum \left[A_p \cdot \cos \alpha_p\right] - \sin nt \cdot \sum \left[A_p \cdot \sin \alpha_p\right].$$

Oder kürzer

$$X = \mathfrak{A} \cdot \cos nt + \mathfrak{B} \cdot \sin nt,$$

wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von der Zeit unabhängig sind. Ebenso können wir setzen:

$$Y = \mathfrak{A}_1 \cdot \cos nt + \mathfrak{B}_1 \cdot \sin nt$$

und

$$Z = \mathfrak{A}_2 \cdot \cos nt + \mathfrak{B}_2 \cdot \sin nt.$$

Durch Elimination von $\sin nt$ und $\cos nt$ aus den drei Gleichungen für X, Y und Z ergiebt sich:

$$X \cdot (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1) + Y \cdot (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B} - \mathfrak{A} \mathfrak{B}_2) + Z \cdot (\mathfrak{A} \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}) = 0,$$

d. h. X, Y, Z sind einer linearen Gleichung mit constanten Coefficienten unterworfen, und die Strecke, deren Componenten X, Y, Z sind, mufs also fortdauernd in einer bestimmten Ebene liegen. Unter diesen Umständen wird es für unsere Uebersicht bequemer sein, wenn wir diese Ebene gleich zur Ebene der Coordinaten machen, etwa zur xy - Ebene. Dann haben wir elektrische Oscillationen nur nach verschiedenen Richtungen dieser Ebene hin. Wenn wir nun weiter verlangen, dafs alle elektrischen Schwingungen des Raumes sich nach derselben Richtung fortpflanzen sollen, und wenn an verschiedenen Punkten verschieden gerichtete Schwingungen sollen vorkommen können, so wird die Fortpflanzungsrichtung nur die z - Richtung sein können, weil die Fortpflanzungsrichtung elektrischer Schwingungen nothwendig senkrecht gegen die Richtung der Schwingung sein mufs. Andererseits wissen wir, dafs die gleichzeitig existirenden magnetischen Schwingungen, die demselben Lichtwellenzuge angehören, auch in einer Ebene vor sich gehen, welche senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung ist. Diese Ebene wird also mit der Ebene der elektrischen Schwingungen übereinstimmen müssen. Es bleiben nun nur die beiden Gleichungen

$$X = \mathfrak{A} \cos nt + \mathfrak{B} \sin nt$$

$$Y = \mathfrak{A}_1 \cos nt + \mathfrak{B}_1 \sin nt$$

für die Componenten der elektrischen Schwingung übrig, da $Z = 0$ ist. Wir bekommen daraus:

$$\mathfrak{B}_1 X - \mathfrak{B} Y = (\mathfrak{A} \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}) . \cos n t$$

und

$$\mathfrak{A}_1 X - \mathfrak{A} Y = (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B} - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}) . \sin n t.$$

Nun können wir $\cos nt$ und $\sin nt$ eliminiren, indem wir die beiden Gleichungen ins Quadrat erheben und addiren. Dann erhalten wir:

$$(\mathfrak{B}_1 X - \mathfrak{B} Y)^2 + (\mathfrak{A}_1 X - \mathfrak{A} Y)^2 = (\mathfrak{A} \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B})^2$$

Betrachten wir nun X und Y als gerichtete Strecken im Raume, so stellt die quadratische Gleichung zwischen X und Y, da sie in Bezug auf X und Y vom zweiten Grade ist, und die linke Seite für keine Werthe von X und Y negativ sein kann, eine Ellipse dar, welche in der xy-Ebene, d. h. in der gemeinsamen Ebene der Oscillationen liegt. Die allgemeinste Art der Bewegung in der betreffenden Oscillationsebene, welche durch eine vollkommen freie und unbegrenzte Combination von elektrischen Oscillationen möglich ist, die nur der Bedingung unterworfen sind, dafs sie alle dieselbe Schwingungsdauer haben, kann durch eine elliptische Bewegung dar-

gestellt werden, wenn wir X und Y als Strecken betrachten. Den einfachsten Ausdruck für die darzustellenden Schwingungen gewinnen wir, wenn wir die Coordinatenaxen für x und y mit den beiden Hauptaxen der Ellipse zusammenfallen lassen. Bei passender Wahl für den Anfangspunkt der Zeit erhalten wir dann Gleichungen von der Form

$$\left. \begin{aligned} X &= \mathfrak{A} \, . \cos nt \\ Y &= \mathfrak{B} \, . \sin nt \end{aligned} \right\} \qquad (425)$$

wo

$$\frac{X^2}{\mathfrak{A}^2} + \frac{Y^2}{\mathfrak{B}^2} = 1$$

die Gleichung der Ellipse ist. Schreibt man

$$X = \mathfrak{A} \, . \cos n t$$

und

$$Y \, . \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \mathfrak{A} \, . \sin nt,$$

so sind die rechten Seiten die Coordinaten eines Punktes, der mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit die Peripherie eines Kreises vom Radius $\mathfrak{A}$ durchläuft. Es ergiebt sich daraus die Art, wie nun innerhalb einer Schwingungsperiode die Projectionen X und Y der einzelnen Componenten sich verändern. Sie verändern sich beide wie die Projectionen eines Radius, welcher regelmäfsige Kreisbewegungen macht, aber bei elliptischer Bewegung ist die eine Projection in constantem Verhältnifs $\mathfrak{B}/\mathfrak{A}$ vergröfsert oder verkleinert.

Die Kreisbewegung selbst ist eine besondere Art der elliptischen Bewegungen, wenn nämlich $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ ist. Ein anderer specieller Fall der elliptischen Bewegung tritt ein, wenn die Amplitude der y-Componente verschwindend klein wird. Dann wird die Bewegung oder die Aenderung des Momentes nur dargestellt werden können durch einen Hin- und Hergang der x-Componente, und die Ellipse ist in eine gerade Linie übergegangen. Das ist der Fall der linearen Polarisation, von der wir ursprünglich ausgegangen sind, und die wir vorausgesetzt hatten, um das Spiegelungs- und Brechungsgesetz zu finden.

Wenn wir elliptische oder circulare Polarisation haben, dann haben wir es immer mit Schwingungen nach veränderlicher Richtung zu thun. Die Axen der Ellipse können nach jeder Richtung hin fallen. Daraus folgt aber auch, dafs, wenn die Ellipse sich in eine gerade Linie zusammenzieht, diese gerade Linie in jede Richtung der Schwingungsebene hinein fallen kann, d. h. also, dafs

lineare Polarisation in jeder Richtung der Schwingungsebene möglich ist.

In den Gleichungen (425) $X = \mathfrak{A} \cos nt$ und $Y = \mathfrak{B} \sin nt$ können $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben. Je nachdem wird die Ellipse in der einen oder anderen Richtung durchlaufen. Die beiden Arten kommen in der That neben einander vor. Man bezeichnet sie als rechts oder links drehend, und unterscheidet deshalb auch in Bezug auf die Circularbewegung eine Circularpolarisation nach rechts und nach links. Wir können das elliptisch oder circular polarisirte Licht uns auch aus zwei linear polarisirten Schwingungen zusammen-gesetzt denken:

$$X = \mathfrak{A} \cos nt, \qquad Y = 0$$

und

$$X = 0, \qquad Y = \mathfrak{B} \sin nt.$$

Da $\sin nt = \pm \cos\left(nt \mp \frac{\pi}{2}\right)$, so können wir sagen, dafs die eine Schwingung gegen die andere einen Phasenunterschied von $\frac{\pi}{2}$ hat. Würden wir zwei senkrecht auf einander polarisirte Strahlen zusammensetzen, deren Phasenunterschied nicht $\frac{\pi}{2}$ wäre, so würde sich nach dem Obigen auch elliptisch polarisirtes Licht ergeben. Nur würden die Hauptaxen der Ellipse nicht in die Polarisationsebenen der beiden Strahlen fallen. Circular polarisirtes Licht ergiebt sich, wenn der Phasenunterschied gleich $\frac{\pi}{2}$ ist, und zugleich die absoluten Beträge der Amplituden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ übereinstimmen. Nun hing bei der totalen Reflexion der Phasenunterschied der beiden reflectirten Schwingungsarten von dem Einfallswinkel α ab; denn es war

$$\frac{p}{c_2} = \frac{\sin \alpha}{c_1}$$

und

$$q^2 = p^2 - 1 = \frac{c_2{}^2 \sin^2 \alpha}{c_1{}^2} - 1.$$

Mithin bekommen wir für q einen Ausdruck, welcher von $\sin \alpha$ abhängig ist; und demnach werden auch die beiden Ausdrücke, die wir bei den beiden Arten von Strahlen für $\operatorname{tg} \omega$ erhalten haben, von dem Winkel abhängig, und ebenso wird der Unterschied der beiden Werthe von ω von dem Einfallswinkel α abhängig. Wenn also die

einfallenden Strahlen der beiden Arten gleiche Phase haben, so werden die reflectirten Strahlen gegen einander einen vom Einfallswinkel abhängigen Phasenunterschied zeigen. Darauf beruht nun die Anwendung der FRESNEL'schen Parallelepipeda, welche bezwecken Circularpolarisation hervorzubringen. Man kann (Fig. 52) von unten her die Strahlen der beiden Arten einfallen lassen senkrecht zur unteren Fläche. Dann werden sie zuerst von der ersten schrägen Fläche total reflectirt, und dann von der zweiten schrägen Fläche wieder total reflectirt, und treten schliefslich senkrecht aus der oberen Fläche aus. Es läfst sich nun, wenn man die Brechungsverhältnisse des Glases kennt, der Winkel berechnen, welcher nöthig ist, um bei jeder der beiden Reflexionen einen Phasenunterschied von $\pi/4$ hervorzubringen. Den Strahlen beider Arten giebt man die gleiche Amplitude, indem man das einfallende Licht durch ein Nicolsches Prisma linear polarisirt und die Polarisationsebene um 45^0 gegen die Einfallsebene der totalen Reflexion geneigt wählt. Man kann sich dann das linear polarisirte Licht in zwei Componenten zerlegt denken, die unter einem rechten Winkel gegen einander polarisirt sind, und keinen Phasenunterschied haben. Bei den totalen Reflexionen bekommen sie einen Phasenunterschied von je $\frac{\pi}{4}$, so dafs nach dieser zweimaligen Reflexion der Phasenunterschied von $\frac{\pi}{2}$ eingetreten ist. Es entsteht dann circular polarisirtes Licht.

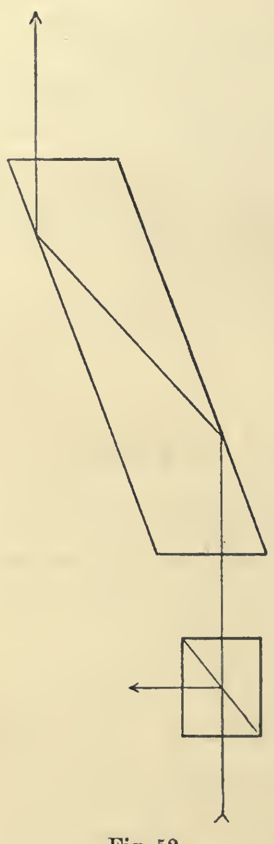


Fig. 52.

Zweiter Abschnitt.

Die Dispersion des Lichtes.

§ 97. Die zur Erklärung der Dispersion nöthigen Annahmen.

In dem System von Gleichungen, die sich aus der MAXWELL'schen Form der elektromagnetischen Theorie ergeben, ist, wie wir gesehen haben, die Möglichkeit von Schwingungssystemen enthalten, welche den Lichtschwingungen entsprechen können, und die Versuche von HERTZ haben gezeigt, dafs ähnliche Schwingungen von viel gröfserer Wellenlänge, welche nicht mehr sichtbar sind, auf rein elektrischem Wege gebildet und mit elektrischen Mitteln beobachtet werden können. Die Theorie erklärt auch, warum die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen in verschiedenen Substanzen verschieden ist. Denn die Fortpflanzungsgeschwindigkeit hängt von den Werthen der dielektrischen und der magnetischen Constanten ab, die in verschiedenen Substanzen verschiedene Werthe haben können. Die Grundgleichungen (399) und (400), wie sie MAXWELL gegeben hat, waren, wenn wir sie auf die Kräfte beziehen,

$$A\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$A\mu \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}$$

$$A\mu \frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}$$

und

$$A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$A\varepsilon \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$A\varepsilon \frac{\partial Z}{\partial t} = \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}$$

Wir haben in § 12 gesehen, dafs die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Transversalschwingungen in einem solchen Medium zu setzen ist

$$c = \frac{1}{A \cdot \sqrt{\varepsilon\mu}}.$$

Hierin bedeutet A eine Constante, die, wie in § 11 gezeigt worden ist, von dem Verhältnifs der elektrostatischen und electromagnetischen Mafseinheiten abhängt.

Das Verhältnifs der Lichtgeschwindigkeit in zwei verschiedenen Medien, welche durch die Indices 0 und 1 unterschieden sein mögen, ist:

$$\frac{c_0}{c_1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \cdot \mu_1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \tag{426}$$

oder wenn wir statt der Lichtgeschwindigkeiten die Brechungsverhältnisse der Medien gegen den leeren Raum einführen, die, wie wir sahen, den Lichtgeschwindigkeiten umgekehrt proportional sind:

$$\frac{n_1}{n_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \cdot \mu_1}{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}\ . \tag{427}$$

In den bekannten durchsichtigen Körpern ist das Verhältnifs $\frac{\mu_1}{\mu_0}$ kaum von 1 unterschieden, und es verhalten sich daher angenähert die Quadrate der Brechungsverhältnisse, wie die dielektrischen Constanten:

$$\frac{n_1^{\,2}}{n_0^{\,2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_0}\ . \tag{428}$$

Das war die Behauptung, welche Maxwell aufstellte, als er zuerst seine Theorie der Elektromagnetik gefunden hatte. Damals war die dielektrische Constante erst für wenige Substanzen gemessen. Es zeigte sich späterhin, dafs scharfe Messungen nur für sehr gut isolirende Körper möglich sind, und bei einer Reihe von solchen Körpern, Benzin, Paraffin, Terpentinöl und einigen ähnlichen, fand sich in der That die Gleichung (428) nahehin erfüllt. Nur mufste man berücksichtigen, dafs der Werth der Brechungsverhältnisse der verschiedenen durchsichtigen Körper für die verschiedenfarbigen Lichtstrahlen verschieden ist, und Maxwell glaubte damals, dafs man bei allen Medien zu einer Uebereinstimmung kommen würde, wenn man die Brechungsverhältnisse der langsamsten Schwingungen, soweit man sie für die verschiedenen Substanzen ermitteln konnte, der Rechnung zu Grunde legte. Indessen lag in der elektromagnetischen Theorie zunächst noch kein Anhaltspunkt, um überhaupt die Möglichkeit der Dispersion zu erkennen, das heifst die Thatsache zu erklären, dafs man für Licht von verschiedener Schwingungsdauer, also für verschiedenfarbiges Licht verschiedene Werthe des Brechungs-

verhältnisses fand, dafs also die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von der Schwingungsdauer abhängig ist.

Diese Unterschiede der Fortpflanzungsgeschwindigkeit und die damit zusammenhängenden Unterschiede des Brechungsvermögens einer jeden durchsichtigen Substanz, sind nun aus den optischen Untersuchungen längst bekannt und zum Theil einer genauen Messung unterworfen worden. Es hat sich dabei gezeigt, dafs die verschiedenen durchsichtigen Substanzen aufserordentlich weit gehende Abweichungen haben, sowohl in Bezug auf die Verschiedenheit der Werthe des Brechungsverhältnisses, als auch in dem Gange der Dispersion, so dafs, wenn man das Brechungsverhältnifs als Function der Schwingungsdauer des betreffenden Lichtes darstellt, sich für verschiedene Körper wesentlich von einander verschiedene Curven ergeben. Christiansen und Kundt entdeckten, dafs sogar ganz grobe Abweichungen von dem regelmäfsigen Gange der Brechung bei solchen Körpern vorkommen, welche Lichtstrahlen einer bestimmten Farbe sehr stark absorbiren. Man nennt diese Art der Dispersion, bei welcher zum Theil das Licht, welches dem rothen Ende des Spectrums näher steht, stärker gebrochen wird, als Licht von der violetten Seite, anomale Dispersion, weil die Farben im Spectrum innerhalb gewisser Grenzen in umgekehrter Reihenfolge erscheinen. Es fragt sich nun, wie bei der elektromagnetischen Theorie diese Dinge angesehen werden können.

Wir finden Brechung des Lichtes und Dispersion überhaupt nur dann, wenn der Aether mit ponderablen Substanzen gemischt ist. Der Aether des Weltraums, welcher frei ist von ponderablen Substanzen, zeigt keine Dispersion. Bei den Verdeckungen von Jupitermonden, wo also ein leuchtender Körper für eine Weile ausgeschaltet ist, und auch bei den totalen Sonnenfinsternissen, wo das Sonnenlicht von unserer Erde abgehalten ist, und dann plötzlich wieder hervor bricht, würde man bei mäfsigen Werthen der Dispersion im Aetherraum zuerst eine der Farben bei dem neu auftretenden Licht sehen müssen, und dann würden allmählich die andern hinzu kommen. Das ist aber nicht zu beobachten. Soviel wir bisher ermittelt haben, ist die Geschwindigkeit des Lichtes im leeren Weltraum, wo wir keine Anwesenheit ponderabler Körper vermuthen können, für Licht jeder Schwingungsdauer die gleiche. Dispersion kommt nur in wägbaren durchsichtigen Substanzen vor, und wir müssen daraus schliefsen, dafs die Dispersion auf einem Einflufs beruht, den die ponderablen Substanzen auf die elektrischen und magnetischen Schwingungen des Aethers ausüben.

Nun hat die MAXWELL'sche Theorie auch zu der Folgerung geführt, dafs die im Aether stattfindenden elektrischen Kräfte auch ponderomotorisch wirken, d. h. also, das Streben hervorbringen, die in den Aether eingelagerte wägbare Substanz zu bewegen. Die elektrischen Kräfte werden als Spannungen angesehen, die im Aether in Richtung der Kraftlinien liegen, während sie Druckcomponenten senkrecht gegen die Richtung der Kraftlinien hervorbringen, so dafs man also in der That daran denken könnte, ob nicht die ponderablen Massen, welche in dem Aether eingelagert sind, durch die elektrischen und magnetischen Spannungen, die nach der MAXWELL'schen Anschauung im Aether zu Stande kommen, mit in Bewegung gesetzt werden.

Dieselbe Theorie giebt auch ganz bestimmten Aufschlufs über die Gröfse dieser Kräfte, und zwar giebt sie Resultate, welche sich vollständig mit denjenigen Resultaten vereinigen lassen, die wir über die Anziehungskräfte der elektrisirten Körper im Luftraum und auch in Räumen, welche mit isolirenden Medien gefüllt sind, durch Beobachtung erhalten. In einem von elektrischen Kräften verschiedener Richtung durchzogenen Raume sind die senkrechten Spannungen

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[X^2 - Y^2 - Z^2\right] \\ Y_y &= \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[Y^2 - Z^2 - X^2\right] \\ Z_z &= \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[Z^2 - X^2 - Y^2\right] \end{aligned}\right\} \tag{429}$$

und die tangentialen Spannungen

$$\left.\begin{aligned} X_y &= Y_x = \frac{\varepsilon}{4\pi} X.Y \\ Y_z &= Z_y = \frac{\varepsilon}{4\pi} Y.Z \\ Z_x &= X_z = \frac{1}{4\pi} Z.X \end{aligned}\right\} \tag{430}$$

Wenn wir uns nun denken, dafs durch Lichtbewegung, die im Aether erregt ist, Spannungen entstehen, so würde ohne Zweifel nach der MAXWELL'schen Theorie zu folgern sein, dafs die wägbaren Atome dadurch in Bewegung gesetzt werden. Es hilft uns aber wenig für die Theorie der Dispersion, wenn wir nicht annehmen, dafs diese im Aether lagernden Atome auch noch wahre Elektricität

enthalten. Die Kraftcomponenten nämlich, welche durch die Spannungen entstehen können, und welche auf die Oberfläche eines im Aether liegenden ponderablen Atomes etwa einwirken können, hängen von den Quadraten und den Producten der elektrischen Spannungen ab, die im Aether entstehen; d. h. also, wenn die Gröfsen X, Y, Z, die in den Ausdrücken der ponderomotorischen Kräfte vorkommen, ihre Richtung ändern und negative statt der positiven Zeichen bekommen, so bleiben alle diese Producte und Quadrate unverändert. Wenn z. B. das X positiv ist während der ersten Hälfte der Undulation, so wird es negativ während der zweiten Hälfte. Wenn es aber dann eine positive Kraft auf der Oberfläche des Atoms während der ersten Hälfte der Undulation hervorbringt, so wird dasselbe während des zweiten Theiles der Oscillation geschehen müssen. Es wird ein Wechsel zwischen zwei positiven Gröfsen und Null sein, und die Veränderungen der Kräfte werden zweimal so oft vor sich gehen, wie die Wechsel in den elektrischen Momenten und elektrischen Kraftgröfsen. Unter diesen Umständen ist nicht darauf zu rechnen, dafs die ponderomotorischen Kräfte zur Unterstützung oder zur Abänderung der ursprünglich gegebenen Oscillationen beitragen können. Anders ist es dagegen, wenn wir den ponderablen Theilchen auch noch elektrische Ladungen zuschreiben, weil alsdann die elektrischen Spannungen nicht lediglich von der Lichtbewegung herrühren und daher, wie wir sehen werden, ponderomotorische Kräfte hervorbringen, deren Periode mit der der Lichtbewegung übereinstimmt. Nun hat aber eine ganz andere Art der Untersuchung in der That auf die Vorstellung geführt, dafs die Atome der ponderablen Substanz mit elektrischen Mengen geladen sind.

§ 98. Die elektrische Ladung der Atome.

Wenn man einen elektrischen Strom durch eine Reihe von flüssigen Körpern leitet, die durch den Strom zersetzt werden können, und die Quanta der Zersetzungsproducte untersucht, die durch die elektrolytische Wirkung des Stromes an den Enden der Leitung zum Vorschein kommen, so stehen diese, wie Faraday gefunden hat, im Verhältnifs der chemischen Aequivalente. Es werden durch denselben Strom in der gleichen Zeit eben so viel Valenzwerthe bei dem einen Elektrolyten frei gemacht und getrennt werden, wie bei jedem andern Elektrolyten, den der Strom passirt, so dafs wir also sagen können: Jede Valenz scheidet mit derselben bestimmten Menge von Elektricität aus, was auch der Stoff sein mag. Im Wasser z. B. haben wir ein

Atom O, welches mit zwei Atomen H verbunden ist; in der Salzsäure hingegen sind zwei Atome Cl mit zwei Atomen H verbunden, was wir in der Form

$$O\begin{matrix}H\\H\end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix}ClH\\ClH\end{matrix}$$

schreiben können. Wenn wir nun den Strom durch eine Zelle hindurch leiten, in welcher H_2O zersetzt wird, so werden für je ein Atom O zwei Atome H frei. Wenn wir denselben Strom weiter durch eine Zelle gehen lassen, in welcher HCl zersetzt wird, so werden ebenfalls zwei Atome H frei, dafür aber auch zwei Atome Cl. Die gleiche Menge Elektricität, welche einerseits zwei Atome H in beiden Versuchen frei macht, macht für diese beiden Atome H in dem Wasser je ein Atom O, und in der Salzsäure je zwei Atome Cl frei. Dasselbe zeigt sich auch, wenn Metalle aus ihren Verbindungen durch den Strom ausgeschieden werden. Für gleiche Valenzen werden immer gleiche Quanta Elektricität an die beiden Elektroden entweder abgegeben oder von ihnen aufgenommen, so dafs also durch die Trennung einer gleichen Anzahl von Valenzen in chemischen Verbindungen auch immer gleiche Quanta wahrer Elektricität auftreten, d. h. solcher Elektricität, die sich wie eine Substanz verhält, welche die gleiche bleibt, auch wenn der Körper in ein anderes dielektrisches Medium eintritt. Nun zeigt sich andererseits, dafs Elektricität durch solche Elektrolyten gar nicht anders hindurchpassiren kann, als indem sie die betreffende Elektrolyse zu Stande bringt, dafs also z. B. positive Elektricität in dem Elektrolyten nur dadurch fortgeleitet werden kann, dafs eine Reihe von positiven Atomen mit dem Strome der positiven Elektricität fortgeführt werden, also dadurch, dafs diese Atome ausscheiden und an der Grenze der Flüssigkeit nun als ein elektrisch neutral gewordener Körper von anderer chemischer Beschaffenheit auftreten. Wenn z. B. das Wasser zersetzt wird, so ist der zersetzte Wasserstoff Kation und geht in Richtung des Stromes der positiven Elektricität. An der Grenze tritt freier neutraler Wasserstoff auf, und es wird ein gewisses Quantum positiver Elektricität an die negativ geladene Elektrode abgegeben, und ebenso geht der Sauerstoff nach der andern Seite als Anion. Er scheidet sich da in Gestalt eines elektrisch neutralen Körpers aus, d. h. er hat keine elektrische Ladung mehr, nachdem er ausgeschieden ist. Dabei ist aber von dem ausscheidenden Sauerstoff ein bestimmtes Aequivalent, und zwar für eine gleiche Menge Sauerstoff ein ganz festes Aequivalent von negativer Elektricität an

die positiv geladene Anode abgegeben worden. Das führt zu der Vorstellung, dafs in der chemischen Verbindung, welche durch die Elektrolyse getrennt wird, das Kation, also in diesem Falle der Wasserstoff, mit positiver Elektricität geladen ist, und zwar mufs jedes Atom in seiner Valenzstelle ein bestimmtes Aequivalent von positiver Elektricität enthalten, während der Sauerstoff mit zwei Aequivalenten negativer Elektricität geladen sein mufs, entsprechend den beiden Aequivalenten positiver Elektricität, die an dem damit verbundenen Wasserstoff haften. Wenn diese Körper ausscheiden, so müssen wir annehmen, dafs von je zwei Atomen des Wasserstoffs das eine seine positive Ladung an die Elektrode abgiebt, und dafs dieses bisher positiv geladene Wasserstoffatom, um sich mit dem andern zu elektrisch neutralem Wasserstoff vereinigen zu können, von der negativ geladenen Kathode ein gleiches Quantum negativer Elektricität aufnehmen mufs. Dadurch entsteht an der Kathode Wasserstoff, der nicht mehr in chemischer Verbindung ist, von dem wir also vermuthen dürfen, dafs er aus zwei verschiedenartig geladenen Atomen Wasserstoff besteht, während der in der Verbindung enthaltene mit zwei positiven Aequivalenten Elektricität verbunden ist, und der zweiwerthige Sauerstoff an seinen beiden Valenzstellen negative Aequivalente enthält. Ebenso würde zu vermuthen sein, dafs jedes Atom Chlor ein negatives Aequivalent enthält, so lange es mit Wasserstoff verbunden ist. Wenn dagegen das Chlor frei geworden ist, verhält es sich nicht mehr als negativ geladener elektrischer Körper, sondern elektrisch geprüft, ist es dann neutral ebenso wie der ausgeschiedene Wasserstoff.

Diese Erscheinungen der Elektrolyse, die sich namentlich in dem Faraday'schen Gesetz äufsern, haben also zu der Vorstellung geführt, dafs alle, mindestens alle elektrolytisch zersetzbaren Körper aus Atomen zusammengesetzt sind, welche elektrisch entgegengesetzt geladen sind; und zwar ist jede Valenzstelle mit einer bestimmten für alle Valenzstellen aller verschiedenen Stoffe immer gleich grofsen Menge entweder positiver oder negativer Elektricität beladen. Wenn nun dergleichen elektrisch geladene Atome im Aether liegen, dann würden sie durch die Aetherspannungen Wirkungen erfahren, und dann bekommen wir in der That Kräfte, welche während jeder Undulation nur einmal wechseln, und also Oscillationen von gleicher Periode, wie sie im Aether stattfinden, an den wägbaren Theilchen hervorbringen können. Diese Bewegungen brauchen einen Theil der Kraft auf, welche in dem Aether hervorgebracht war, verändern dadurch auch die Aetheroscillationen und rufen so die Dispersion hervor.

§ 99. Die elektrischen Momente der Ionenpaare.

Die Elektricitätsmengen, mit denen nach den Erscheinungen der Elektrolyse die Atome geladen sind, rufen nun sehr kräftige Anziehungen zwischen diesen hervor. Das Quantum Elektricität z. B., welches in den beiden Bestandtheilen eines Milligramms Wasser frei wird, ist so grofs, dafs der positive Theil selbst in einer Meile Entfernung noch eine enorme Anziehung auf den negativen ausüben würde. Wir müssen uns also die Elektricitätsmengen, welche an den Atomen haften, als sehr grofs vorstellen im Vergleich mit der Masse der Atome. Wenn wir nun annehmen, dafs ponderable Substanz in dem Aether eingelagert ist, welche aus chemischen Verbindungen von geladenen Ionen besteht, so müssen die elektrischen Kräfte, welche im Aether wirken, auch gleichzeitig auf diese eingefügten und elektrisch geladenen ponderablen Atome ponderomotorische Kräfte ausüben.

Nach den Formeln, welche über die Spannungen, die im Innern von dielektrischen und magnetischen Körpern eintreten, sowohl nach der älteren Theorie, wie sie ursprünglich von POISSON unter Zugrundelegung von Fernkräften entwickelt worden war, als auch in den neueren Theorieen, hat man

$$\left.\begin{aligned} X_x &= \frac{2\pi}{\varepsilon}[\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{Z}^2] \\ Y_y &= \frac{2\pi}{\varepsilon}[-\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 - \mathfrak{Z}^2] \\ Z_z &= \frac{2\pi}{\varepsilon}[-\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2] \end{aligned}\right\} \quad (431)$$

$$\left.\begin{aligned} X_y = Y_x &= \frac{4\pi}{\varepsilon}[\mathfrak{X}.\mathfrak{Y}] \\ Y_z = Z_y &= \frac{4\pi}{\varepsilon}[\mathfrak{Y}\cdot\mathfrak{Z}] \\ Z_x = X_z &= \frac{4\pi}{\varepsilon}[\mathfrak{Z}\cdot\mathfrak{X}] \end{aligned}\right\} \quad (432)$$

Diese Gleichungen sind nur eine andere Form der Gleichungen (429) und (430), die durch die Einführung der elektrischen Momente statt der Kräfte entsteht. Die x-Componente der Kraft, welche auf ein unendlich kleines Parallelepipedon wirkt, ist

$$\left[\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz,$$

und ähnliche Ausdrücke gelten für die anderen Componenten.

Wir nehmen nun an, dafs der Körper homogen sei, so dafs in den verschiedenen Theilen, über welche wir unsere Ausdrücke auszudehnen haben, die Constante ε immer von derselben Gröfse ist. Dann erhalten wir für die x-Componente der Kraft, wenn wir von dem Factor $dx\,dy\,dz$ absehen,

$$\frac{4\pi}{\varepsilon}\left[\mathfrak{X}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} - \mathfrak{Y}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial x} - \mathfrak{Z}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}\right] + \frac{4\pi}{\varepsilon}\left[\mathfrak{X}\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \mathfrak{Y}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y}\right] + \frac{4\pi}{\varepsilon}\left[\mathfrak{X}\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z} + \mathfrak{Z}\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z}\right]$$

$$= \frac{4\pi\mathfrak{X}}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right] + \frac{4\pi\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial x}\right] + \frac{4\pi\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}\right].$$

Der Ausdruck

$$\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}$$

bedeutet die Dichtigkeit der wahren Elektricität und möge mit σ bezeichnet werden. Der erste Theil der Kraft ist demnach gleich der elektrischen Kraft $X = \frac{4\pi\mathfrak{X}}{\varepsilon}$ multiplicirt mit der in dem Element enthaltenen wahren Elektricität. Die folgenden Theile

$$+\frac{4\pi\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\cdot\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial x}\right] + \frac{4\pi\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\cdot\left[\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}\right]$$

können nach den Gleichungen (31), (32) und (33) auch in der Form

$$A\mu\mathfrak{Y}\frac{\partial N}{\partial t} - A\mu\mathfrak{Z}\frac{\partial M}{\partial t}$$

geschrieben werden, und können also nur da von Null verschieden sein, wo ein magnetisches Moment sich ändert, d. h. also, wo, wie wir uns ausgedrückt haben, ein magnetischer Strom durch den elektrisirten Körper hindurch geht. Die Ausdrücke für die y- und z-Componenten sind analog. Uns interessirt hier für die Lichttheorie im Wesentlichen nur das erste Glied $X\sigma$. Denn da, wie wir sahen, die Ladung der Atome verhältnissmäfsig grofs ist, so ist bei kleinen Werthen der elektrischen und magnetischen Kraft $X\sigma$ als grofs gegen die folgenden Glieder anzusehn.

Wenn nun elektrisirte Ionen mit ihren elektrischen Ladungen im Aether liegen, und zur Zeit eine positive elektrische Kraft an

irgend einer Stelle wirkt, so wird diese das positiv geladene Atom in ihrer eigenen Richtung fortzuführen streben, das negativ geladene Atom aber in entgegengesetzter Richtung. Die elektrolytischen Erscheinungen führten auf den Satz, dafs die Ladung einer jeden Valenz in jedem Atom gleich grofs ist, und also immer in einem neutral elektrischen Körper jedem positiv geladenen Atom ein gleich stark negativ geladenes entsprechen müsse. Die Kräfte also, welche auf ein Paar von positiv und negativ geladenen Ionen einwirken, werden immer als ein Kräftepaar betrachtet werden können, das den Schwerpunkt des Ionenpaares nicht verrücken kann, wohl aber Aenderungen hervorbringen könnte sowohl in der Richtung, welche die beiden Ionen zu einander haben, als auch in der Entfernung, in der sie gegenseitig liegen, wobei aber ihr gemeinsamer Schwerpunkt unverändert bleiben mufs. Dadurch würde das elektrische Moment des Ionenpaars verändert. Wenn die Ionen durch die elektrische Kraft auseinandergerissen werden, würde das Moment wachsen, durch eine entgegengesetzte Kraft würde es vermindert werden. Wenn das Ionenpaar gedreht wird, so würden zu dem ursprünglichen Moment, das eine bestimmte Richtung hat, noch Componenten von anderer Richtung hinzutreten können. Wir unterscheiden demnach einerseits die elektrischen Momente, welche in dem Aether durch seine eigene dielektrische Beschaffenheit erregt werden können, sowie seine magnetischen Momente, und andrerseits die elektrischen Momente der Ionenpaare. Magnetische Momente der Ionenpaare anzunehmen haben wir bisher noch keinen Grund. Ihre Existenz ist in hohem Grade unwahrscheinlich, da wir keine isolirten Massen kennen, welche nur einen magnetischen Pol enthielten und nur mit einer Art von Magnetismus geladen wären.

Die elektrischen Momente des Aethers selbst setzen wir wie bisher den elektrischen Kräften proportional:

$$\mathfrak{X} = \frac{\varepsilon X}{4\pi}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{\varepsilon Y}{4\pi}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{\varepsilon Z}{4\pi} .$$

Die elektrischen Momente der beweglichen Ionenpaare dagegen würden nicht der elektrischen Kraft proportional sein, denn sie werden erstens durch die Trägheit der schweren Atome, welche sich bewegen, beeinflufst, und zweitens werden wir in Rücksicht ziehen müssen, dafs Wärmebewegungen bei diesen Erschütterungen in den schweren Massen zu Stande kommen können, also allerlei unregelmäfsige Oscillationen, die auf Kosten der Kraft geschehen, bei denen also ein Reibungsvorgang stattfindet, durch welchen die Arbeits-

äquivalente in Wärmebewegung verwandelt werden. Durch diese beiden Umstände, die Trägheit und die Reibung, wird also bedingt, dafs die elektrischen Momente der Ionenpaare nicht lediglich von der Gröfse der elektrischen Kraft abhängen. Denn sie müssen sich erst in ihre neue Gleichgewichtslage hinüber bewegen, und sie werden dabei Beschleunigungen und Verzögerungen erleiden, so dafs sie allerdings immer derjenigen Gleichgewichtslage zustreben, in welcher die elektrischen Kräfte sie zu erhalten suchen, aber sie eventuell nie erreichen, sondern um sie herum oscilliren. Die elektrischen Momente der Ionen berechnet auf die Volumeinheit sollen mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet werden.

§ 100. Die Bewegungsgleichungen eines mit Ionenpaaren durchsetzten Aethers.

Die Bewegungsgleichungen eines Systems von Massenpunkten sind von Hamilton in eine sehr zweckmäfsige Form gebracht worden. Bezeichnet F die potentielle Energie des Systems und L die kinetische Energie, so mufs die erste Variation des Integrals

$$\int_{t_1}^{t_2} (F - L)\, d\,t$$

verschwinden, wenn die Variationen der Coordinaten für t_1 und t_2 gleich Null gesetzt werden. Hierin hängt F nur von den Coordinaten ab, während L eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten ist. Die Energie des Systems, die wir mit E bezeichnen wollen, ist dann

$$E = F + L.$$

Die Differenz $F - L$ wollen wir das kinetische Potential nennen und mit H bezeichnen.

Auf diese Weise werden sogleich die Differentialgleichungen für die unabhängigen Veränderlichen gewonnen, ohne dafs man die Differentialgleichungen für die Coordinaten der Massenpunkte selbst aufzustellen braucht. Wir wollen die unabhängigen Veränderlichen, die die Lage des Systems bestimmen, in einem erweiterten Sinne des Wortes „Coordinaten“ des Systems nennen, und ihre Differentialquotienten nach der Zeit „Geschwindigkeiten“. Dann ist F eine Function der Coordinaten und L eine homogene Function zweiten Grades der Geschwindigkeiten, deren Coefficienten die Coordinaten enthalten können.

Auch den Begriff der Kraft wollen wir erweitern. Eine Kraft kann man durch die Arbeit definiren, die sie bei einer gegebenen Verschiebung ihres Angriffspunktes leistet. Ist $d\mathfrak{A}$ die von einer Kraft bei der Verschiebung dx geleistete Arbeit und ist K die in die Richtung der Verschiebung fallende Componente, so ist:

$$d\mathfrak{A} = K.dx.$$

Ist nun F die potentielle Energie des Systems und K die Componente der inneren Kraft, d. h. der in dem Ausdruck der potentiellen Energie berücksichtigten Kraft des Systems, die an dem betreffenden Punkte angreift, so ist $d\mathfrak{A} = -dF$ zu setzen. Denn wenn K die Richtung der Verschiebung hat, so wird kinetische Energie erzeugt und mithin die potentielle Energie vermindert werden. Es ist dann also

$$K = -\frac{\partial F}{\partial x}.$$

Wenn nun $p_1, p_2 \dots p_n$ die Coordinaten des Systems sind in dem erweiterten Sinne des Wortes, so wollen wir analog $-\frac{\partial F}{\partial p_a}$ die der Coordinate p_a entsprechende Kraft nennen.

Man kann nun die Hamilton'sche Form der Bewegungsgleichungen auch auf den Fall ausdehnen, wo zu den inneren Kräften des Systems, die als Functionen der Coordinaten betrachtet werden, äufsere Kräfte hinzutreten, die in jedem Augenblicke ganz beliebige Werthe haben können. Man braucht zu dem Ende nur zu H eine Summe $\sum P_a p_a$ hinzuzufügen, wo die Gröfsen P_a als Functionen der Zeit, aber unabhängig von den Coordinaten betrachtet werden. In der Ruhelage, wo $L = 0$ ist, würde die Hamilton'sche Form dann verlangen, dafs

$$\frac{\partial F}{\partial p_a} + P_a = 0$$

ist. Oder mit anderen Worten: $-P_a$ ist die äufsere Kraft, die nöthig ist, um der inneren Kraft $-\frac{\partial F}{\partial p_a}$ das Gleichgewicht zu halten. In dieser Form liefert das Hamilton'sche Integral bei der Variation Lagrange's Gleichungen für die äufseren Kräfte:

$$\frac{\partial H}{\partial p_a} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial H}{\partial q_a}\right) = -P_a,$$

worin $q_a = \frac{dp_a}{dt}$ gesetzt ist.

Diese Methode, aus der Variation eines Integrals, das nichts anderes als die Energiequanta des Systems enthält, die Bewegungsgleichungen zu finden, läſst sich nun auch auf andere physikalische Vorgänge ausdehnen, die nicht einfach auf Bewegungen wägbarer Massen und auf Newton's Bewegungsgesetze zurückzuführen sind, in denen sich aber doch Energiequanta bethätigen.

Es wird aber nothwendig, die ältere engere Annahme fallen zu lassen, wonach die Geschwindigkeiten nur in dem Werthe der kinetischen Energie und zwar in Form einer homogenen Function zweiten Grades vorkommen, und zu untersuchen, wie sich die Sache verhält, wenn H eine Function der Coordinaten und Geschwindigkeiten von beliebiger Form ist.

Die Maxwell'schen Gleichungen kann man auf diese Weise ableiten, wenn man H als Summe aus den folgenden über den unendlichen Raum erstreckten Integralen zusammensetzt.

$$\left.\begin{aligned} H &= \Phi_e + \Phi_m + \Phi_q \\ \Phi_e &= 4\pi \iiint \left\{ \frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\varepsilon} \right\} dx\, dy\, dz \\ \Phi_m &= 4\pi \iiint \frac{1}{2\mu} \left\{ \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z} \right)^2 \right. \\ &\qquad \left. + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x} \right)^2 \right\} dx\, dy\, dz \\ \Phi_q &= 4\pi A \iiint \left\{ \mathfrak{U} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \mathfrak{V} \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \mathfrak{W} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \right\} dx\, dy\, dz \end{aligned}\right\} \quad (433)$$

$\mathfrak{U}, \mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ hängen dabei mit den Componenten $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ des magnetischen Moments durch die Gleichungen

$$\mathfrak{L} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial y}, \quad \mathfrak{M} = \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial z}, \quad \mathfrak{N} = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial x}$$

zusammen.

Die Variation von H nach $\mathfrak{U}$ liefert:

$$4\pi \int_{t_1}^{t_2} \iiint \frac{1}{\mu} \left(-\mathfrak{M} \frac{\partial \delta \mathfrak{U}}{\partial z} + \mathfrak{N} \frac{\partial \delta \mathfrak{U}}{\partial y} \right) dx\, dy\, dz\, dt$$

$$+ 4\pi A \int_{t_1}^{t_2} \iiint \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \delta \mathfrak{U}\, dx\, dy\, dz\, dt$$

oder wenn man das erste Integral durch partielle Integration nach y und z umgestaltet und beachtet, dafs die über die Grenze erstreckten Theile des Integrals wegfallen:

$$4\pi\int_{t_1}^{t_2}\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)+A\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}\right\}\delta\mathfrak{U}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Soll diese Variation verschwinden, so müssen wir haben

$$A\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)$$

Auf analoge Weise ergeben sich aus der Variation nach $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ die den anderen beiden Coordinatenrichtungen entsprechenden Maxwell'schen Gleichungen.

Die Variation von H nach $\mathfrak{X}$ liefert:

$$4\pi\int_{t_1}^{t_2}\iiint\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\,\delta\mathfrak{X}\,dx\,dy\,dz\,dt+4\pi A\int_{t_1}^{t_2}\iiint\mathfrak{U}\,\frac{\partial\,\delta\mathfrak{X}}{\partial t}\,dx\,dy\,dz\,dt$$

und nach partieller Integration des zweiten Integrals nach t

$$4\pi\int_{t_1}^{t_2}\iiint\left\{\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}-A\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}\right\}\delta\mathfrak{X}\,dx\,dy\,dz\,dt.$$

Das Verschwinden der Variation verlangt

$$A\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t}=\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}$$

und analog ergiebt sich

$$A\frac{\partial\mathfrak{V}}{\partial t}=\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\quad\text{und}\quad A\frac{\partial\mathfrak{W}}{\partial t}=\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}.$$

Differentiirt man die zweite dieser Gleichungen nach z, die dritte nach y und zieht sie von einander ab, so erhält man die Maxwell'sche Gleichung

$$A\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right)$$

und analog ergeben sich die andern beiden

$$A\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right)$$

$$A\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right)$$

Wie wir in § 32 fanden bedeutet das Integral Φ_e die elektrische Energie und Φ_m die magnetische Energie.

Will man die Bewegung des Aethers in den MAXWELL'schen Gleichungen mit berücksichtigen, so hat man nur zu beachten, dafs der elektrische und magnetische Strom auf ein sich mit dem Aether fortbewegendes, aus bestimmten Aethertheilchen bestehendes Flächenelement bezogen werden mufs, dessen Gestalt und Lage sich also mit der Zeit ändert. Werden $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ als Functionen der Zeit und fester Raumcoordinaten $x\,y\,z$ betrachtet, so drückt z. B. $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}dx\,dy$ nicht den elektrischen Strom aus, der durch das Flächenelement $dx\,dy$ tritt, wenn wir es sich mit dem Aether bewegen lassen. Der Ausdruck, der in diesem Falle an die Stelle von $\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$ zu treten hat, ergiebt sich durch folgende Ueberlegung.

Es mögen die Aenderungen $\delta\mathfrak{X}$, $\delta\mathfrak{Y}$, $\delta\mathfrak{Z}$ des Vectors $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ gesucht werden, welche nöthig sind, damit der Vector

$$\mathfrak{X} + \delta\mathfrak{X}, \quad \mathfrak{Y} + \delta\mathfrak{Y}, \quad \mathfrak{Z} + \delta\mathfrak{Z}$$

mit einem im Aether in der Zeit dt fortbewegten unendlich kleinen Parallelogramm ein Parallelepipedon von gleichem Volumen bestimme, wie der Vector $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ mit dem ursprünglichen Parallelogramm. Es liege das Parallelogramm ursprünglich in der xy-Ebene, und es seien die Vectoren $dx, 0, 0$ und $0, dy, 0$ zwei anstofsende Seiten. Dann ist das Volumen des ursprünglichen Parallelepipedons gleich $\mathfrak{Z}\,dx\,dy$. Sind nun α, β, γ die Geschwindigkeiten der Aetherbewegung, die auch als Functionen von x, y, z, t betrachtet werden, so geht in der Zeit dt der Vector dx, 0, 0 in

$$dx + \frac{\partial \alpha}{\partial x}dx\,dt, \quad \frac{\partial \beta}{\partial x}dx\,dt, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial x}dx\,dt$$

der Vector 0, dy, 0 in

$$\frac{\partial \alpha}{\partial y}dy\,dt, \quad dy + \frac{\partial \beta}{\partial y}dy\,dt, \quad \frac{\partial \gamma}{\partial y}dy\,dt$$

über. Das Parallelogramm $dx\,dy$ erhält demnach in der Zeit dt die drei Projectionen:

$$-\frac{\partial\gamma}{\partial x}dx\,dy\,dt, \quad -\frac{\partial\gamma}{\partial y}dx\,dy\,dt, \quad dx\,dy + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)dx\,dy\,dt,$$

wobei die Gröſsen vierter Ordnung weggelassen sind.

Das Volumen des neuen Parallelepipedons wird demnach, wenn wir die Gröſsen vierter Ordnung weglassen:

$$\left[-\mathfrak{X}\frac{\partial\gamma}{\partial x}dt - \mathfrak{Y}\frac{\partial\gamma}{\partial y}dt + \mathfrak{Z} + \delta\mathfrak{Z} + \mathfrak{Z}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)dt\right]dx\,dy.$$

Soll also das Volumen unverändert bleiben, so ist zu setzen:

$$\delta\mathfrak{Z} = \left[\mathfrak{X}\frac{\partial\gamma}{\partial x} + \mathfrak{Y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \mathfrak{Z}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)\right]dt.$$

Nun rückt das Flächentheilchen in der Zeit dt von dem Punkte $x\,y\,z$ zu dem Punkte $x + \alpha\,dt$, $y + \beta\,dt$, $z + \gamma\,dt$. Wird $\mathfrak{Z}$ als Function von $x\,y\,z\,t$ angesehn, so würde also die Aenderung von $\mathfrak{Z}$ in der Zeit dt, wenn man dabei die Aenderungen von $x\,y\,z$ berücksichtigt, gleich:

$$\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}dt + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}\alpha\,dt + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial y}\beta\,dt + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\gamma\,dt$$

sein. Wenn dies gleich $\delta\mathfrak{Z}$ wäre, so würde das bedeuten, daſs in der Zeit dt kein elektrischer Strom durch die Fläche $dx\,dy$ hindurchtritt. Wenn es aber von $\delta\mathfrak{Z}$ verschieden ist, so stellt die Differenz die auf die Flächeneinheit berechnete in der Zeit dt hindurchtretende Elektricitätsmenge dar. Dividirt man durch dt, so erhält man den auf die Flächeneinheit berechneten Strom, der durch die im Aether sich fortbewegende Fläche hindurchtritt. Dieser Ausdruck

$$\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial x}\alpha + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial y}\beta + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\gamma - \mathfrak{X}\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \mathfrak{Y}\frac{\partial\gamma}{\partial y} + \mathfrak{Z}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t} + \left(\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial z}\right)\gamma + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{Z}\alpha - \mathfrak{X}\gamma\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mathfrak{Z}\beta - \mathfrak{Y}\gamma\right)$$

muſs also in den MAXWELL'schen Gleichungen an Stelle von $\frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial t}$ eingesetzt werden, wenn man die Aetherbewegung berücksichtigen will. Analoge Ausdrücke ergeben sich an Stelle von $\frac{\partial\mathfrak{X}}{\partial t}$ und $\frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial t}$, sowie an

Stelle von $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t}$, wo aber $\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = 0$ gesetzt werden kann, da wir keinen wahren Magnetismus annehmen.

Diese erweiterte Form der MAXWELL'schen Gleichungen ist ebenfalls aus der Variation des Integrals zu gewinnen, wenn man nur in Φ_q an Stelle von $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}$ die neuen Ausdrücke einführt, welche die Bewegung des Aethers berücksichtigen. Die Variation nach $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ gleich Null gesetzt, liefert dann

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \sigma\alpha + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{X}\beta - \mathfrak{Y}\alpha) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{X}\gamma - \mathfrak{Z}\alpha)\right\}\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} + \sigma\beta + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{Y}\gamma - \mathfrak{Z}\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Y}\alpha - \mathfrak{X}\beta)\right\}\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} + \sigma\gamma + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Z}\alpha - \mathfrak{X}\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{Z}\beta - \mathfrak{Y}\gamma)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (434)$$

wo σ für $\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}$ geschrieben ist.

Die Variation nach $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ liefert

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W}) + \mathfrak{N}\beta - \mathfrak{M}\gamma\right\}\\
\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W}) + \mathfrak{L}\gamma - \mathfrak{N}\alpha\right\}\\
\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\alpha\mathfrak{U} + \beta\mathfrak{V} + \gamma\mathfrak{W}) + \mathfrak{M}\alpha - \mathfrak{L}\beta\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (435)$$

Differentiirt man die zweite Gleichung nach z, die dritte nach y und zieht beide von einander ab, so ergiebt sich:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) = A\left\{\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{L}\beta - \mathfrak{M}\alpha) + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{L}\gamma - \mathfrak{N}\alpha)\right\}$$

und auf analoge Weise erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{M}\gamma - \mathfrak{N}\beta) + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{M}\alpha - \mathfrak{L}\beta)\right\}\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}\right) &= A\left\{\frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{N}\alpha - \mathfrak{L}\gamma) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{N}\beta - \mathfrak{M}\gamma)\right\}
\end{aligned}\right\} \quad (436)$$

Die Gleichungen (434) und (436) enthalten auf den rechten Seiten die Componenten des elektrischen und magnetischen Stromes,

bezogen auf ein mit dem Aether sich bewegendes Flächenelement, auf die Einheit der Fläche berechnet.

Jetzt ist es nicht schwer, die Aenderungen anzugeben, die man an der Function H anbringen mufs, um auch die Bewegung der Ionen zu berücksichtigen. Es sollten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Componenten des auf die Volumeinheit berechneten elektrischen Momentes der ponderabeln Materie sein.

In der Gleichgewichtslage würden $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ den Componenten der elektrischen Kraft, wenigstens innerhalb gewisser Grenzen der Polarisationsstärke, proportional gesetzt werden können, so dafs wir die Componenten der elektrischen Kraft, welche die Momente $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in der Ruhelage erzeugen, gleich

$$\frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta}, \quad \frac{4\pi\mathfrak{y}}{\vartheta}, \quad \frac{4\pi\mathfrak{z}}{\vartheta}$$

setzen können, wo ϑ eine der ponderabeln Materie zukommende Constante ist. Sind die elektrischen Momente der Ionen nicht in der Gleichgewichtslage, so sind

$$X - \frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta}, \quad Y - \frac{4\pi\mathfrak{y}}{\vartheta}, \quad Z - \frac{4\pi\mathfrak{z}}{\vartheta}$$

die übrig bleibenden Componenten, die $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ zu ändern streben, oder mit anderen Worten: wir können uns z. B. X in die beiden Theile $\left(X - \frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta}\right) + \frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta}$ zerlegt denken, von denen dem zweiten durch das Moment $\mathfrak{x}$ das Gleichgewicht gehalten wird, so dafs nur die Wirkung von $X - \frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta}$ übrig bleibt.

Bei der Aenderung von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ um $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$, $d\mathfrak{z}$ ist die potentielle Energie ebenso zu berechnen, wie die Aenderung der potentiellen Energie bei der Bewegung eines Magneten im magnetischen Felde. Auf die Einheit des Volumens berechnet, ist die Aenderung der potentiellen Energie

$$-\left\{\left(X - \frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta}\right) d\mathfrak{x} + \left(Y - \frac{4\pi\mathfrak{y}}{\vartheta}\right) d\mathfrak{y} + \left(Z - \frac{4\pi\mathfrak{z}}{\vartheta}\right) d\mathfrak{z}\right\}$$

oder

$$d\left\{-(X\mathfrak{x} + Y\mathfrak{y} + Z\mathfrak{z}) + \frac{4\pi}{2\vartheta}(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)\right\}$$

Für Φ_e haben wir daher jetzt zu setzen:

$$\Phi_e = 4\pi\iiint\left\{\frac{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2 + \mathfrak{Z}^2}{2\varepsilon} - \frac{\mathfrak{X}\mathfrak{x} + \mathfrak{Y}\mathfrak{y} + \mathfrak{Z}\mathfrak{z}}{\varepsilon} + \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2}{2\vartheta}\right\} dx\, dy\, dz \quad (437)$$

Der zweite, mit Φ_m bezeichnete, magnetische Theil des kinetischen Potentiales kann unverändert bleiben. Der dritte, elektromagnetische Theil Φ_q reducirt sich, indem wir in den Ausdrücken

$$\mathfrak{U}\left\{\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}+\sigma\alpha+\frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{X}\beta-\mathfrak{Y}\alpha)+\frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{X}\gamma-\mathfrak{Z}\alpha)\right\}$$

und den beiden analogen die Glieder dritten Grades kleiner Gröfsen (zu denen aber σ nicht gehört, das wir uns an den Ionen verhältnifsmäfsig grofs vorzustellen haben) weglassen, auf:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_q = 4\pi A\iiint\Big\{\mathfrak{U}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}+\alpha\sigma\right)+\mathfrak{V}\left(\frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}+\beta\sigma\right)\\ +\mathfrak{W}\left(\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}+\gamma\sigma\right)\Big\}\,dx\,dy\,dz\end{aligned}\right\}\quad(438)$$

Das σ ist überall gleich Null, aufser an den elektrisch geladenen Stellen der Ionen. Wenn wir annehmen, dafs der Aether sich an diesen Stellen ebenso bewegt wie die Ionen, so ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}=\alpha\sigma,\quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}=\beta\sigma,\quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}=\gamma\sigma$$

und also:

$$\left.\begin{aligned}\Phi_q = 4\pi A\iiint\Big\{\mathfrak{U}\frac{\partial(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})}{\partial t}+\mathfrak{V}\frac{\partial(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})}{\partial t}\\ +\mathfrak{W}\frac{\partial(\mathfrak{Z}+\mathfrak{z})}{\partial t}\Big\}\,dx\,dy\,dz\end{aligned}\right\}\quad(438\text{a})$$

Aufserdem haben wir in dem Ausdruck für H nun noch die lebendige Kraft der Ionen und die Reibung zu berücksichtigen.

Die Componenten der Geschwindigkeit der Ionen sind den Gröfsen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}$ proportional. Denn wenn dx, dy, dz die Projectionen des Weges sind, die das eine Ion eines Ionenpaares in der Zeit dt zurücklegt, so sind $-dx, -dy, -dz$ die Projectionen des Weges, den das andere Ion in derselben Zeit zurücklegt. Ist ferner e die Ladung des ersten, so ist $-e$ die Ladung des zweiten Ions, und mithin sind $2e\,dx$, $2e\,dy$, $2e\,dz$ die Aenderungen der Componenten ihres elektrischen Momentes. Man kann daher die lebendige Kraft der Ionen in der Form

$$\frac{1}{2}\iiint m_1\left\{\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\}dx\,dy\,dz \qquad (439)$$

schreiben, wo m_1 der Dichtigkeit der ponderabeln Materie proportional ist. Die lebendige Kraft mufs mit dem negativen Zeichen in H aufgenommen werden. Die Reibungskräfte, deren Componenten, auf die Volumeinheit berechnet, mit $-\mathfrak{x}_1$, $-\mathfrak{y}_1$, $-\mathfrak{z}_1$ bezeichnet werden mögen, setzen wir den Geschwindigkeiten der Gröfse nach proportional, aber von entgegengesetzter Richtung, und schreiben demgemäfs

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_1 &= k_1 \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} \\ \mathfrak{y}_1 &= k_1 \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} \\ \mathfrak{z}_1 &= k_1 \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{440}$$

wo k_1 eine positive Gröfse ist.

Nach dem, was oben bemerkt wurde, kann ihr Einflufs ebenfalls aus der Variation des kinetischen Potentiales erhalten werden, wenn man zu H den Ausdruck

$$\iiint (\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{z}\,\mathfrak{z}_1)\, dx\, dy\, dz \tag{441}$$

hinzufügt und bei der Variation $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$ nicht mit variirt. Das Integral, dessen Variation verschwinden soll, besteht also aus den Zeitintegralen über Φ_e, Φ_m, Φ_q, wie diese in den Gleichungen (437), (438) und (438a) dargestellt sind, und über

$$-\frac{1}{2}\iiint m_1 \left\{\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)^2\right\} dx\, dy\, dz$$
$$+ \iiint \left\{\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{y}\,\mathfrak{y}_1 + \mathfrak{z}\,\mathfrak{z}_1\right\} dx\, dy\, dz$$

Daraus ergiebt sich:

1. Bei der Variation nach $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{x}}{\varepsilon} &= A \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial t} \\ \frac{\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}}{\varepsilon} &= A \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} \\ \frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{z}}{\varepsilon} &= A \frac{\partial \mathfrak{W}}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{442}$$

woraus durch Differentiation und Subtraction, wie oben bei den Gleichungen (436), die Gleichungen gewonnen werden:

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right)\\
A\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{X}-\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right)\\
A\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X}-\mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}}{\varepsilon}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{443}$$

2. Bei der Variation nach $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$

$$\left.\begin{aligned}
A\frac{\partial(\mathfrak{X}+\mathfrak{x})}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right)\\
A\frac{\partial(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y})}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)\\
A\frac{\partial(\mathfrak{Z}+\mathfrak{z})}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right)
\end{aligned}\right\}\tag{444}$$

3. Bei der Variation nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$

$$-\frac{4\pi\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{4\pi\mathfrak{x}}{\vartheta} - 4\pi A\frac{\partial\mathfrak{U}}{\partial t} + m_1\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} + \mathfrak{x}_1 = 0,$$

was, combinirt mit den Gleichungen (440) und (442), giebt:

$$\frac{8\pi\mathfrak{X}}{\varepsilon} = 4\pi\left(\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\mathfrak{x} + m_1\frac{\partial^2\mathfrak{x}}{\partial t^2} + k_1\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial t}$$

und entsprechend

$$\frac{8\pi\mathfrak{Y}}{\varepsilon} = 4\pi\left(\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\mathfrak{y} + m_1\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2} + k_1\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}$$

$$\frac{8\pi\mathfrak{Z}}{\varepsilon} = 4\pi\left(\frac{1}{\vartheta}+\frac{1}{\varepsilon}\right)\mathfrak{z} + m_1\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2} + k_1\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\tag{445}$$

Der kürzeren Schreibweise halber setzen wir

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}+1\right) &= a^2\\
\frac{\varepsilon m_1}{8\pi} &= m\\
\frac{\varepsilon k_1}{8\pi} &= k
\end{aligned}\right\}\tag{446}$$

somit wird

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X} &= a^2 \mathfrak{x} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} \\ \mathfrak{Y} &= a^2 \mathfrak{y} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t} \\ \mathfrak{Z} &= a^2 \mathfrak{z} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\end{aligned}\right\} \qquad (445\,\mathrm{a})$$

§ 101. Die Dispersionsformeln.

Nachdem wir so die Grundgleichungen unseres Problems gebildet haben, ist es nicht schwer, nun die weiteren Schlüsse daraus zu ziehen. Wir wollen uns auf den einfachsten Fall beschränken, dafs wir ebene Wellen haben, die sich in Richtung der x-Axe fortpflanzen. Wir wissen, dafs sich solche Wellen fortpflanzen können, wenn nach der einen Polarisationsrichtung elektrische, nach der anderen magnetische Schwingungen bestehen, und diese Schwingungen alle senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung sind. Wir wollen annehmen, dafs die elektrischen Schwingungen in Richtung der y-Axe und die magnetischen Schwingungen in Richtung der z-Axe vor sich gehen. Dann werden wir für die elektrischen Momente setzen können:

$$\mathfrak{Y} = B \,.\, e^{i n (t + p x)}$$
$$\mathfrak{X} = \mathfrak{Z} = 0 .$$

Für einen positiven Werth von p würde hier die Bewegung in der Richtung der negativen x-Werthe fortschreiten und p würde die Zeit sein, in der die Bewegung um die Strecke 1 fortschreitet. Es soll hier aber der Fall nicht ausgeschlossen sein, dafs p auch complexe Werthe erhält. Der reelle Theil von $i n p$ bestimmt die Dämpfung der Oscillationen, während von dem imaginären Theil die Fortpflanzungsgeschwindigkeit abhängt.

Ferner setzen wir:

$$\mathfrak{N} = C \,.\, e^{i n (t + p x)}$$
$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 0 ,$$

und endlich werden wir noch für die elektrischen Schwingungen der Ionen zu setzen haben:

$$\mathfrak{y} = b \,.\, e^{i n (t + p x)}$$
$$\mathfrak{x} = \mathfrak{z} = 0 .$$

Die Constanten sind nun so zu bestimmen, dafs die Gleichungen

$$A \cdot \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{X} - \mathfrak{x}}{\varepsilon}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}}{\varepsilon}\right)$$

$$A \frac{\partial (\mathfrak{Y} + \mathfrak{y})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{L}}{\mu}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu}\right)$$

$$\mathfrak{Y} = a^2 \mathfrak{y} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}$$

erfüllt werden. Alle übrigen Gleichungen (443), (444) und (445) sind bei den gemachten Annahmen von selbst erfüllt; ε und μ werden im ganzen Raume als constant angenommen. Setzen wir ein, so kann in allen Gliedern der Factor $e^{in(t+px)}$ weggehoben werden, und es ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} A.C.in &= -(B-b)\cdot\frac{i.n.p}{\varepsilon} \\ A.(B+b).i.n &= -\frac{C}{\mu}\cdot i.n.p \\ B &= a^2 b - m b n^2 + k b i n \end{aligned}\right\} \tag{447}$$

Aus der ersten und zweiten Gleichung (447) hebt sich $i.n$, und die Gleichungen werden reell; aber die dritte bleibt complex. Zur Vereinfachung werde statt b das Verhältnifs $\frac{b}{B} = h$ in die Gleichungen eingeführt. Dann gehen sie über in

$$\left.\begin{aligned} A.C &= -B.(1-h)\cdot\frac{p}{\varepsilon} \\ A.B.(1+h) &= -\frac{C.p}{\mu} \\ 1 &= (a^2 - m n^2 + k i n) h \end{aligned}\right\} \tag{448}$$

Aus der dritten dieser Gleichungen erhält man:

$$h = \frac{1}{a^2 - m n^2 + k i n}. \tag{449}$$

Durch Division der linken und rechten Seiten der anderen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$\frac{B}{C}(1+h) = \frac{C}{B}\,\frac{\varepsilon}{\mu(1-h)} \quad \text{oder} \quad \left(\frac{B}{C}\right)^2 = \frac{\varepsilon}{\mu(1-h^2)}$$

und durch Multiplication:

$$A^2.(1+h) = \frac{p^2}{\mu\,\varepsilon}\cdot(1-h). \tag{450}$$

Diese Gleichung bestimmt den Werth von p und damit ist für einen beliebigen Werth von n bis auf einen in C, b, B enthaltenen willkürlichen Proportionalitätsfactor Alles bestimmt.

Es wird

$$p^2 = \frac{A^2.\mu.\varepsilon.(1+h)}{1-h}. \tag{450a}$$

Da h aber eine complexe Gröſse ist, wird auch p eine complexe Gröſse werden.

Bezeichnet $\mathfrak{C}_0$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, welche das durchsichtige Medium zeigen würde, wenn keine beweglichen und verschiebbaren elektrisch geladenen Ionen in ihm lägen, so ist nach dem Früheren

$$A^2.\mu.\varepsilon = \frac{1}{\mathfrak{C}_0^2}$$

und daher

$$p = \pm\frac{1}{\mathfrak{C}_0}\sqrt{\frac{1+h}{1-h}}. \tag{450b}$$

Nach der Gleichung (449) ist

$$\frac{1}{h} + 1 = a^2 - m n^2 + 1 + k.i.n$$

und

$$\frac{1}{h} - 1 = a^2 - m n^2 - 1 + k.i.n.$$

Wir bestimmen nun eine positive Zahl ϱ_0 und einen Winkel Θ_0, so daſs

$$a^2 - m n^2 + 1 = \varrho_0.\cos\Theta_0 \quad \text{und} \quad k n = \varrho_0 \sin\Theta_0$$

ist, und ebenso ϱ_1 und Θ_1, so daſs

$$a^2 - m n^2 - 1 = \varrho_1.\cos\Theta_1 \quad \text{und} \quad k n = \varrho_1 \sin\Theta_1 \tag{451}$$

ist. Dann wird

$$\left.\begin{aligned} p &= \pm\frac{1}{\mathfrak{C}_0}\sqrt{\frac{\varrho_0(\cos\Theta_0+i\sin\Theta_0)}{\varrho_1(\cos\Theta_1+i\sin\Theta_1)}} \\ &= \pm\frac{1}{\mathfrak{C}_0}\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\cdot\frac{e^{i\Theta_0}}{e^{i\Theta_1}}} = \pm\frac{1}{\mathfrak{C}_0}\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}\,e^{-\frac{1}{2}i(\Theta_1-\Theta_0)} \\ &= \pm\frac{1}{\mathfrak{C}_0}\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}\cdot\left[\cos\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0) - i\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0)\right] \end{aligned}\right\} \tag{452}$$

Durch beide Vorzeichen für p kann man den Gleichungen genügen. Je nachdem der reelle Theil von p positiv oder negativ ist, laufen die dargestellten Wellen in der Richtung der negativen oder positiven Werthe von x. Da wir nur den einen Fall zu betrachten brauchen, so wollen wir das negative Zeichen wählen.

Da k und n ihrer physikalischen Bedeutung nach positiv sind, so liegen Θ_1 und Θ_0 zwischen 0 und π, und da ferner

$$\operatorname{cotg}\Theta_0 - \operatorname{cotg}\Theta_1 = \frac{2}{kn}$$

und daher also $\operatorname{cotg}\Theta_0 > \operatorname{cotg}\Theta_1$ ist, so mufs $\Theta_1 > \Theta_0$ sein. Mithin sind $\cos\frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_0)$ und $\sin\frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_0)$ positiv.

Schreiben wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{n}{\mathfrak{C}_0}\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}\sin\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0) \\ &\text{und} \\ \frac{1}{\mathfrak{C}} &= \frac{1}{\mathfrak{C}_0}\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}\cos\frac{1}{2}(\Theta_1-\Theta_0) \end{aligned}\right\} \tag{453}$$

so wird, wenn wir das negative Zeichen wählen:

$$p = -\frac{1}{\mathfrak{C}} + \frac{i}{n}q, \tag{454}$$

wo $\mathfrak{C}$ und q beide positiv sind. Dann wird

$$e^{in(t+px)} = e^{-qx}\cdot e^{in\left(t-\frac{x}{\mathfrak{C}}\right)}$$

und dies stellt eine Wellenbewegung dar, die mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{C}$ in der positiven x-Richtung fortschreitet. Der Factor e^{-qx} bezeichnet dabei eine Abnahme der Amplitude in der Richtung der fortschreitenden Wellen in dem Maafse, dafs für die Längeneinheit die Amplitude sich auf den Bruchtheil e^{-q} ihres Betrages reducirt.

Wir müssen uns nun den Gang dieser Verhältnisse klar machen, wenn wir allmählich von kleinen Schwingungszahlen der Lichtwellen

zu Lichtwellen mit grofsen Schwingungszahlen übergehen. Zu dem Zweck ist es rathsam, eine graphische Darstellung anzuwenden.

In der Ebene der Zeichnung wollen wir reelle und imaginäre Gröfsen durch auf einander rechtwinklige Coordinaten darstellen.

Die complexe Zahl $\frac{1}{h} = a^2 - mn^2 + kni$ wird durch einen Punkt dargestellt, dessen Abscisse $x = a^2 - mn^2$ und dessen Ordinate $y = kn$ ist (Fig. 53).

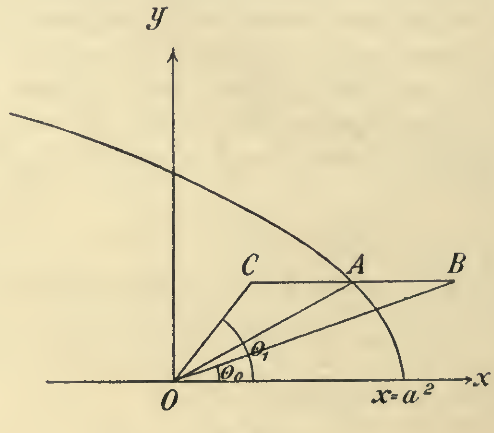


Fig. 53.

Betrachten wir Wellen mit allen möglichen Schwingungszahlen, so haben wir n als Veränderliche zu betrachten. Die Punkte, welche die Gröfse $\frac{1}{h}$ darstellen, bilden dann eine Curve, deren Gleichung wir erhalten, indem wir n eliminiren:

$$x = a^2 - \frac{m \cdot y^2}{k^2}.$$

Das ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel bei $x = a^2$ liegt. Je gröfser y wird, desto kleiner wird x, und die concave Seite der Parabel wird nach der Richtung der negativen x-Axe gewendet sein. Die Werthe von n sind den Ordinaten dieser Parabel proportional. Es sei A irgend ein Punkt der Parabel, dann erhalten wir die Punkte B und C, welche die complexen Zahlen $\frac{1}{h} + 1$ und $\frac{1}{h} - 1$ darstellen, indem wir von A parallel der x-Axe nach rechts und nach links um

die Längeneinheit vorwärts gehen. Mithin ist dann $\varrho_0 = OB$, $\varrho_1 = OC$, $\Theta_0 = \sphericalangle BOx$, $\Theta_1 = \sphericalangle COx$, $\Theta_1 - \Theta_0 = \sphericalangle COB$.

Nach den in den Gleichungen (453) gemachten Definitionen von q und $\mathfrak{C}$ ist

$$2\pi \frac{q}{n} \cdot \mathfrak{C} = 2\pi \operatorname{tg} \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{2}.$$

Das ist aber der Dämpfungscoefficient für eine Wellenlänge. Denn n ist die Anzahl der Schwingungen in der Zeit 2π, und da $\mathfrak{C}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist, so ist $\frac{\mathfrak{C}}{n} 2\pi$ also die Wellenlänge für eine Schwingung. Nimmt nun x um Δx zu, so reducirt sich die Amplitude der Welle, wie wir oben gesehen haben, auf den Bruchtheil $e^{-q\Delta x}$ ihres Betrages. Mithin wird sie sich für eine Wellenlänge auf den Bruchtheil $e^{-2\pi\frac{q}{n}\cdot\mathfrak{C}}$ reduciren. Es bildet $\operatorname{tg}\frac{(COB)}{2}$ also ein Maafs für die Absorption. Je gröfser der Winkel ist, unter dem die Strecke CB von O aus gesehen erscheint, um so gröfser ist die Absorption. Sie wird Null, wenn A im Scheitel liegt, vorausgesetzt, dafs $a^2 > 1$ ist. Sie nimmt dann mit wachsendem n zunächst zu, um für sehr grofse Werthe von n wieder beliebig klein zu werden.

Rückt der Punkt A vom Scheitel aufwärts, so bewegen sich die beiden Punkte B und C immer mit derselben Geschwindigkeit wie A, sowohl was die Gröfse der Geschwindigkeit betrifft, als auch die Richtung. Bezeichnet $C'A'B'$ eine benachbarte Lage der Strecke CAB, so ist also

$$d\Theta_1 = \frac{AA' \sin(C'CO)}{OC}$$

$$d\Theta_0 = \frac{AA' \sin(B'BO)}{OB}.$$

Daher wird der Winkel Θ_1 schneller wachsen als Θ_0, so lange $\frac{\sin(C'CO)}{OC}$ gröfser ist als $\frac{\sin(B'BO)}{OB}$, und langsamer, sobald es kleiner ist. Der Winkel $\Theta_1 - \Theta_0$ erreicht ein Maximum, wenn

$$\frac{\sin(C'CO)}{OC} = \frac{\sin(B'BO)}{OB}$$

ist. Schneidet die Parabel die y-Axe nahezu senkrecht, so tritt

das Maximum sehr nahe der Stelle ein, wo $OC = OB$ ist, wo also A auf der y-Axe liegt und $a^2 = m n^2$ ist.

Der betreffende Werth $n = \sqrt{\frac{a^2}{m}}$ entspricht der Eigenschwingung des Molekels, die wir erhalten, wenn wir in der Gleichung

$$\mathfrak{Y} = a^2 \mathfrak{y} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}$$

das elektrische Moment $\mathfrak{Y}$ und den Reibungscoefficienten k gleich Null setzen. Die starke Absorption tritt also da ein, wo die Periode des Lichtes mit der eigenen Schwingungsperiode der Molekeln übereinstimmt. Die starke Absorption ist also von starkem Mitschwingen der Molekeln begleitet, so dafs wir dabei auch Wärmeentwickelung und unter Umständen ein Zerreifsen der Ionenverbindungen erwarten können, namentlich wenn noch eine elektrostatische Ladung der Substanz hinzukommt. So sind wohl die Beobachtungen von Hertz zu erklären über die Entweichung der Elektricität unter dem Einflufs der ultravioletten Strahlen.

Für den Gang der Dispersion sind die beiden Fälle $a^2 > 1$ und $a^2 < 1$ zu unterscheiden. Nach Gleichung (446) war $a^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\vartheta} + 1\right)$, so dafs die Unterscheidung auch durch $\varepsilon > \vartheta$ und $\varepsilon < \vartheta$ ausgedrückt werden kann.

Die Reibung wollen wir in beiden Fällen gering annehmen, den Werth von k also klein voraussetzen.

1. Es sei $a^2 > 1$.

Der Winkel $\Theta_1 - \Theta_0 = \sphericalangle COB$ (Fig. 53) ist für kleine Werthe von n sehr klein und wächst mit wachsendem n zunächst langsam, da die Parabel bei kleinen Werthen von k flach ist. Gröfsere Werthe erhält der Winkel erst, wenn die Strecke CAB sich der y-Axe nähert. Für $n^2 = \frac{a^2 - 1}{m}$ fällt der Punkt C in die y-Axe und für $n^2 = \frac{a^2 + 1}{m}$ der Punkt B. Für die erste Lage ist $\operatorname{tg}(COB) = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{m}{a^2 - 1}}$, also bei dem kleinen Werthe von k ist $\sphericalangle COB$ nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$. Für die zweite Lage ist $\operatorname{tg}(COB) = \frac{2}{k}\sqrt{\frac{m}{a^2 + 1}}$ und wieder $\sphericalangle COB$ nahezu gleich $\frac{\pi}{2}$, während für das Maximum

der Absorption $n^2 = \frac{a^2}{m}$ und $\operatorname{tg} \frac{(COB)}{2} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{m}{a^2}}$, mithin $\sphericalangle COB$ nahezu gleich π ist. Während also innerhalb dieses Intervalles von $n = \sqrt{\frac{a^2-1}{m}}$ bis $n = \sqrt{\frac{a^2+1}{m}}$ bei dem vorausgesetzten kleinen Werthe von k die Absorption beträchtlich ist, wird sie aufserhalb des Intervalles alsbald sehr gering. In dem Ausdruck, den wir oben (Gleichung 453) für das Verhältnifs der Geschwindigkeiten im leeren und im beladenen Aether, d. i. für das Brechungsverhältnifs fanden,

$$\frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}} = \sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}} \cos \frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_0),$$

kann der Factor $\cos \frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_0)$ aufserhalb des Absorptionsstreifens unberücksichtigt bleiben, da er sehr nahe gleich 1 ist. Der Gang des Brechungsverhältnisses wird hier also als Function der Schwingungszahl im Wesentlichen durch $\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}$ dargestellt. Die Figur 53 lehrt uns, dafs das Brechungsverhältnifs für $n = 0$ den Werth $\sqrt{\frac{a^2+1}{a^2-1}}$ hat. Mit wachsendem n nehmen ϱ_0 und ϱ_1, so lange $\sphericalangle COB$ klein ist, um nahezu dieselben Gröfsen ab. Mithin mufs $\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$ wachsen, da der Nenner relativ stärker abnimmt. Erst wenn der Winkel COB gröfser wird, d. h. wenn CAB der y-Axe näher kommt, wird ϱ_1 weniger schnell abnehmen als ϱ_0, und $\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$ mufs dann mit wachsendem n kleiner werden. Für $n^2 = \frac{a^2}{m}$ wird $\frac{\varrho_0}{\varrho_1} = 1$ und für $n^2 > \frac{a^2}{m}$ mufs $\frac{\varrho_0}{\varrho_1}$ zunächst noch weiter abnehmen, weil nun ϱ_1 wächst, während ϱ_0 noch abnimmt. Für grofse Werthe von n wird es aber wieder zunehmen und sich dem Werthe 1 asymptotisch nähern, da ϱ_0 und ϱ_1 alsdann unbegrenzt wachsen, der Unterschied $\varrho_1 - \varrho_0$ aber nahezu gleich 2 wird.

Mithin wird auch das Brechungsverhältnifs für $n = 0$ bis in die Nähe des Absorptionsstreifens gröfser als 1 sein, und mit wachsender Schwingungszahl wachsen, wie es bei den durchsichtigen Körpern gewöhnlich beobachtet wird. Dann aber wird durch die

Absorption der abnehmende Werth von $\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}$ noch mehr herabgedrückt. Das Brechungsverhältnifs mufs rasch abnehmen, hinter dem Absorptionsstreifen aber wieder zunehmen und sich dem Werthe 1 asymptotisch nähern. In der That wird die Abnahme des Brechungsindex mit wachsender Schwingungszahl, die sogenannte anomale Dispersion bei Medien beobachtet, die im sichtbaren Theil des Spectrums einen Absorptionsstreifen besitzen. Bei den farblos durchsichtigen Körpern, bei denen gewöhnlich die Brechungsverhältnisse untersucht worden sind, hat man den Absorptionsstreifen jenseits des Ultravioletten anzunehmen. In dem Absorptionsstreifen nimmt das Brechungsverhältnifs nach unserer Formel bis unter 1 ab, so dafs hier die Geschwindigkeit des Lichtes gröfser ist, als im leeren Aether. Auch dies ist bei einigen Metallen von Kundt beobachtet worden.

Natürlich ist nicht ausgeschlossen, dafs auch Moleküle vorkommen können mit mehreren eigenen Schwingungsperioden, die mehrere Absorptionsstreifen und entsprechend verwickeltere Brechungsverhältnisse geben.

2. Es sei $a^2 < 1$.

In diesem Falle nimmt $\sqrt{\frac{\varrho_0}{\varrho_1}}$ von dem Werthe $\sqrt{\frac{a^2+1}{1-a^2}}$ mit wachsendem n ab, wird für $n^2 = \frac{a^2}{m}$ gleich 1, nimmt zunächst noch weiter ab, um dann wieder zuzunehmen und sich dem Werthe 1 asymptotisch zu nähern. Der Winkel COB ist für $n = 0$ gleich π und bleibt beträchtlich, so lange CAB die y-Axe schneidet. Für gröfsere Werthe von n wird der Winkel rasch klein und nähert sich asymptotisch dem Werthe Null. Danach drückt der Factor $\cos\frac{1}{2}(\Theta_1 - \Theta_0)$ für die kleineren Werthe von n bis hinter $n^2 = \frac{a^2}{m}$ das Brechungsverhältnifs stark herab. Für grofse Werthe spielt der Factor keine Rolle mehr und das Brechungsverhältnifs nimmt zu und nähert sich asymptotisch dem Werth 1. Körper von diesem Typus lassen sich unter den bisher untersuchten noch nicht erkennen.

Dritter Abschnitt.

Die Brechung und Spiegelung bei absorbirenden Medien.

§ 102. Die Verhältnisse der Amplituden des einfallenden, des reflectirten und des gebrochenen Strahles.

Die Bewegungsgleichungen des Lichtes in einem mit Ionenpaaren beladenen Aether lassen nun auch die Gesetze der Brechung, Spiegelung und Polarisation des Lichtes für den Fall erkennen, dafs das Licht an der Oberfläche eines absorbirenden Mediums reflectirt wird. Medien dieser Art sind die Metalle. Dafs hier bei der Reflexion Licht absorbirt wird, läfst sich sogleich erkennen, wenn das reflectirte Licht farbig ist, wie z. B. beim Kupfer und beim Golde.

Aber auch ohne ausgesprochene farbige Reflexion ist dieser sogenannte Metallglanz charakteristisch. Er kommt nicht nur bei den fast undurchsichtigen Metallen vor, sondern auch bei einer Reihe von Körpern, bei denen gewisse Strahlen sehr vollständig absorbirt werden; so haben mehrere Anilinfarbstoffe, wie z. B. in sehr ausgezeichneter Weise das Fuchsin, diese eigenthümliche metallische Reflexion, welche sich theils durch ihre Lichtstärke auszeichnet, theils dadurch, dafs eine ganz bestimmte Farbe in dem Reflex sehr stark hervortritt. Wir finden alle möglichen Uebergangsstufen bis herab zu fast vollkommen durchsichtigen Körpern, die uns durch ihr äufseres Ansehen kaum eine Absorption verrathen würden. Aber bei vielen der bekannten durchsichtigen Körper zeigt sich eine Andeutung der Absorption darin, dafs linear polarisirtes Licht durch die Reflexion elliptisch polarisirt wird. Diese elliptische Polarisation ist eine Eigenthümlichkeit der Reflexion an absorbirenden Medien.

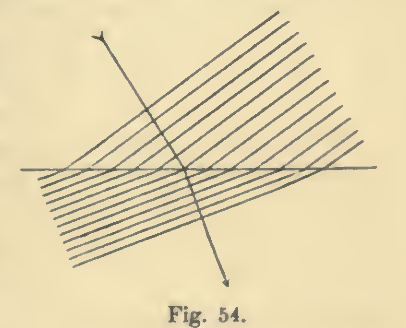


Fig. 54.

Es sei (Fig. 54) eine ebene Oberfläche eines stark absorbirenden Mediums gegeben und es mag ein Wellenzug auffallen und auf der Grenzfläche des zweiten Mediums ablaufen. Dann entsteht, wie wir gesehen haben, eine Grenzbedingung dadurch, dafs in dem

zweiten Medium auch Wellen ablaufen müssen, die eine etwas andere Richtung nehmen, deren Spuren aber mit den Spuren der einfallenden Wellen auf der Grenzfläche zusammenfallen müssen. Wenn wir oben ein nicht absorbirendes Medium haben und die einfallenden Wellen also gleiche Stärke behalten, indem sie ablaufen, so werden diese Wellen im ersten Medium eine oscillirende Bewegung mit constanter Amplitude hervorbringen. Die Wellen aber, die in dem zweiten Medium erregt werden und von der Eintrittsstelle aus in der Richtung entsprechend dem gebrochenen Strahl herabgehen, haben in derselben Wellenebene nicht constante Intensität. Indem die Welle sich durch das zweite Medium fortpflanzt, unterliegt sie einer Absorption; die tiefer eingedrungenen Theile können also schon stark geschwächt sein, während die anderen Theile derselben Wellenebene, welche eben erst in das zweite Medium eingetreten sind, noch die volle Intensität haben müssen, die ihnen von dem oberen Medium aus mitgetheilt worden ist. Das hatten wir bisher bei unseren Gleichungen der Lichtbewegung noch nicht berücksichtigt. Im ersten Medium gelten die MAXWELL'schen Gleichungen in ihrer ursprünglichen Form:

$$A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon_1}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon_1}\right)$$

$$A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu_1}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu_1}\right)$$

und die analogen für die anderen Componenten. In dem zweiten Medium gehen wir wieder von den allgemeinen Gleichungen (443), (444) und (445a) der elektromagnetischen Wellen aus, welche sich auf ein mit elektrisirten Ionen durchzogenes Medium beziehen:

$$A \cdot \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}}{\varepsilon_2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{Z} - \mathfrak{z}}{\varepsilon_2}\right)$$

$$A \frac{\partial (\mathfrak{X} + \mathfrak{x})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathfrak{N}}{\mu_2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathfrak{M}}{\mu_2}\right)$$

$$\mathfrak{X} = a^2 \mathfrak{x} + m \frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + k \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t},$$

und die entsprechenden für die anderen Componenten.

Da wir es immer nur mit periodischen Schwingungen einer Farbe zu thun haben, so können wir annehmen, dafs die Abhängigkeit von der Zeit in allen diesen Gleichungen dadurch gegeben ist,

dafs die vorkommenden Gröfsen alle den Factor e^{int} enthalten, und im Uebrigen nur Functionen der Coordinaten sind. Die Differentialquotienten nach der Zeit sind dann einfach zu bilden, indem man so oft mit $i.n$ multiplicirt, als die Ordnung des Differentialquotienten beträgt. Dann erhalten wir im zweiten Medium die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon_2\, in\,\mathfrak{L} &= \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}) \\ A\mu_2\, in(\mathfrak{X}+\mathfrak{x}) &= \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial z} \\ \mathfrak{X} &= a^2.\mathfrak{x} - m.n^2.\mathfrak{x} + kin\,\mathfrak{x} \end{aligned}\right\} \tag{455}$$

und die analogen den anderen Componenten entsprechenden Gleichungen. In jedem Medium sind μ und ε constant angenommen.

Die letzte Gleichung giebt uns das Verhältnifs $\mathfrak{X}:\mathfrak{x}$, nämlich

$$\mathfrak{x} = h\mathfrak{X}, \tag{456}$$

wo unter h dieselbe Gröfse verstanden ist, die wir schon oben in Gleichung (449) so bezeichnet hatten

$$h = \frac{1}{a^2 - mn^2 + kin},$$

für die anderen Componenten erhalten wir analog

$$\mathfrak{y} = h\mathfrak{Y} \text{ und } \mathfrak{z} = h\mathfrak{Z}.$$

Danach können $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ aus dem System der Gleichungen (455) ganz fortgeschafft werden und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{A\varepsilon_2\, in}{1-h}\mathfrak{L} &= \frac{\partial\mathfrak{Y}}{\partial z} - \frac{\partial\mathfrak{Z}}{\partial y} \\ A\mu_2(1+h)in\mathfrak{X} &= \frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial y} - \frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{457}$$

und die analogen Gleichungen für die anderen Componenten.

Die Gleichungen sind von derselben Form, wie sie sich auch ohne die Annahme der Ionen ergeben würden. Nur sind an Stelle von ε_2 und μ_2 die imaginären Constanten $\frac{\varepsilon_2}{1-h}$ und $\mu_2(1+h)$ getreten. Daraus folgt, dafs wir die Spiegelung und Brechung der Wellen an der Grenze des zweiten Mediums gerade so erörtern können, wie wir es in §§ 93 und 94 gethan haben. Nur knüpfen wir hier unsere Betrachtungen an die Momente, während wir dort

überall die Componenten der elektrischen und magnetischen Kraft eingeführt hatten.

Es sei $x = 0$ die Gleichung der Grenzfläche zwischen den beiden Medien und es sei die positive x-Richtung nach der Seite des ersten Mediums gerichtet. Wenn wir dann die magnetischen Schwingungen der einfallenden Wellen, die in dem ersten Medium verlaufen, der z-Axe parallel setzen, so haben wir zu schreiben:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{M} = 0,$$

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{A} . e^{in\left(t - \frac{\sin\alpha}{c} y + \frac{\cos\alpha}{c} x\right)}$$

wo c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im ersten Medium bezeichnet.

Fügen wir gleich die magnetische Schwingung der reflectirten Wellen hinzu, so wird

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{A} . e^{in\left(t - \frac{\sin\alpha}{c} . y + \frac{\cos\alpha}{c} . x\right)} + \mathfrak{B} . e^{in\left(t - \frac{\sin\alpha}{c} . y - \frac{\cos\alpha}{c} . x\right)}$$

Die MAXWELL'schen Gleichungen geben im ersten Medium:

$$A \mu_1 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y},$$

$$A \mu_1 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = 0.$$

Da $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Variable t, wie wir voraussetzen, nur in dem Factor e^{int} enthalten, so folgt aus diesen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
A \mu_1 in \mathfrak{X} &= - in \mathfrak{N} \cdot \frac{\sin\alpha}{c} \\
A \mu_1 in \mathfrak{Y} &= - \frac{\cos\alpha}{c} \left[\mathfrak{A} e^{in\left(t - \frac{\sin\alpha}{c} y + \frac{\cos\alpha}{c} x\right)} \right. \\
&\qquad \left. - \mathfrak{B} e^{in\left(t - \frac{\sin\alpha}{c} y - \frac{\cos\alpha}{c} x\right)} \right] \\
\mathfrak{Z} &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (458)$$

Im zweiten Medium ist für ebene Wellen, deren magnetische Schwingungen der z-Axe parallel sind, zu setzen:

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{M}' = 0$$

$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{C} . e^{ni(t + px + qy)}.$$

Nach den Gleichungen (457) haben wir dann

$$\left.\begin{aligned} A\mu_2(1+h)\mathfrak{X}' &= q\,\mathfrak{N}' \\ A\mu_2(1+h)\mathfrak{Y}' &= -p\,\mathfrak{N}' \\ \mathfrak{Z}' &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{459}$$

und wenn diese Ausdrücke für $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ in die Gleichung

$$\frac{A\varepsilon_2 i n}{1-h}\mathfrak{N}' = \frac{\partial \mathfrak{X}'}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}'}{\partial x}$$

eingesetzt werden:

$$\frac{A\varepsilon_2 i n}{1-h}\mathfrak{N}' = \frac{i n}{A\mu_2(1+h)} q^2 \mathfrak{N}' + \frac{i n}{A\mu_2(1+h)} p^2 \mathfrak{N}'$$

oder

$$A^2 \varepsilon_2 \mu_2 \frac{1+h}{1-h} = p^2 + q^2. \tag{460}$$

In der Grenzfläche $x = 0$ müssen, wie wir in § 93 schon auseinandergesetzt haben, die Componenten der elektrischen und magnetischen Kraft, die in die Grenzfläche fallen, für beide Medien übereinstimmen. Es müssen also für $x = 0$ die beiden Gleichungen erfüllt sein:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{N}}{\mu_1} &= \frac{\mathfrak{N}'}{\mu_2} \\ \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon_1} &= \frac{\mathfrak{Y}'}{\varepsilon_2} \end{aligned}\right\} \tag{461}$$

Es mufs mithin erstens

$$e^{i n\left(t - \frac{\sin\alpha}{c} y\right) - i n (t + q y)}$$

von t und y unabhängig und daher

$$q = -\frac{\sin\alpha}{c} \tag{462}$$

sein. Zweitens müssen zwischen den Constanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Gleichungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}}{\mu_1} &= \frac{\mathfrak{C}}{\mu_2} \\ \text{und} \qquad -\frac{\cos\alpha}{A\mu_1 c}\cdot\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{\varepsilon_1} &= -\frac{p}{A\mu_2(1+h)}\cdot\frac{\mathfrak{C}}{\varepsilon_2} \end{aligned}\right\} \tag{463}$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen die Verhältnisse von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, d. h. die Verhältnisse der Amplituden des einfallenden, reflectirten und gebrochenen Strahles für den Fall, dafs die magnetischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind. Durch Elimination von $\mathfrak{C}$ ergiebt sich

$$\mathfrak{A}\left(\frac{\cos\alpha}{A\varepsilon_1 c} - \frac{p}{A\varepsilon_2(1+h)}\right) = \mathfrak{B}\left(\frac{\cos\alpha}{A\varepsilon_1 c} + \frac{p}{A\varepsilon_2(1+h)}\right), \quad (464)$$

wo p aus den Gleichungen (460) und (462) zu bestimmen ist.

Wenn die elektrischen Schwingungen zur Einfallsebene senkrecht sind, bleibt alles analog, nur müssen die Gleichungen für die magnetischen Momente mit denen für die elektrischen Momente vertauscht werden; $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{N}$ sind Null, und wenn wir die elektrischen z-Componenten im ersten Medium

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}\,e^{ni\left[t - \frac{\sin\alpha}{c}y + \frac{\cos\alpha}{c}x\right]} + \mathfrak{B}\,e^{ni\left[t - \frac{\sin\alpha}{c}y - \frac{\cos\alpha}{c}x\right]},$$

im zweiten Medium

$$\mathfrak{Z}' = \mathfrak{C}\,e^{ni[t+px+qy]}$$

setzen, so wird die magnetische y-Componente im ersten Medium durch die Gleichung

$$\varepsilon_1 A i n \mathfrak{M} = \frac{\cos\alpha}{c} i n \left(\mathfrak{A}\,e^{ni\left[t - \frac{\sin\alpha}{c}y + \frac{\cos\alpha}{c}x\right)} - \mathfrak{B}\,e^{ni\left[t - \frac{\sin\alpha}{c}y - \frac{\cos\alpha}{c}x\right]}\right),$$

im zweiten Medium durch die Gleichung

$$\varepsilon_2 A i n \mathfrak{M}' = (1-h) p i n \mathfrak{C}\,e^{ni[t+px+qy]}$$

gegeben. Da nun an der Grenzfläche die tangentialen Kraftcomponenten übereinstimmen müssen, so ergeben sich für $x = 0$ die Gleichungen $\frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon_1} = \frac{\mathfrak{Z}'}{\varepsilon_2}$ und $\frac{\mathfrak{M}}{\mu_1} = \frac{\mathfrak{M}'}{\mu_2}$; und daraus ähnlich wie oben:

$$\left.\begin{aligned} q &= -\frac{\sin\alpha}{c} \\ \frac{\mathfrak{A}}{\varepsilon_1} + \frac{\mathfrak{B}}{\varepsilon_1} &= \frac{\mathfrak{C}}{\varepsilon_2} \\ \frac{\cos\alpha}{\varepsilon_1 A c}\left(\frac{\mathfrak{A}-\mathfrak{B}}{\mu_1}\right) &= (1-h)\frac{p}{\varepsilon_2 A}\cdot\frac{\mathfrak{C}}{\mu_2} \end{aligned}\right\} \quad (465)$$

und durch Elimination von $\mathfrak{C}$:

$$\mathfrak{A} . \left\{ \frac{\cos \alpha}{c . A . \mu_1} - \frac{p(1-h)}{A . \mu_2} \right\} = \mathfrak{B} . \left\{ \frac{\cos \alpha}{c . A . \mu_1} + \frac{p(1-h)}{A \mu_2} \right\} \quad (466)$$

wo p wieder durch die Gleichung (460), die sich hier auf analoge Weise ergiebt, bestimmt ist, nämlich

$$p^2 = A^2 \varepsilon_2 \mu_2 \frac{1+h}{1-h} - \frac{\sin^2 \alpha}{c^2}.$$

Für $A^2 \varepsilon_2 \mu_2 \frac{1+h}{1-h}$ kann auch aus der Gleichung (452) der Ausdruck

$$\frac{1}{\mathfrak{C}_0^2} \frac{\varrho_0}{\varrho_1} e^{-i(\Theta_1 - \Theta_0)}$$

eingesetzt werden. Die Gröfse p wird also complex sein, und wenn wir

$$p = f + gi$$

setzen, wird

$$\left.\begin{aligned} f^2 - g^2 &= \frac{1}{\mathfrak{C}_0^2} \frac{\varrho_0}{\varrho_1} \cos(\Theta_1 - \Theta_0) - \frac{\sin^2 \alpha}{c^2} \\ 2fg &= -\frac{1}{\mathfrak{C}_0^2} \frac{\varrho_0}{\varrho_1} \sin(\Theta_1 - \Theta_0) \end{aligned}\right\} \quad (467)$$

Der Exponentialfactor

$$e^{in\left(t - \frac{\sin \alpha}{c} y + px\right)}$$

kann dann in der Form

$$e^{-gnx} . e^{in\left(t - \frac{\sin \alpha}{c} y + fx\right)}$$

geschrieben werden. Es bedeutet $-\frac{1}{f}$ dann die Strecke, um welche der Durchschnittspunkt einer Wellenebene mit der x-Axe in der Zeiteinheit weiter rückt. Da wir die positive Richtung der x-Axe nach der Seite des ersten Mediums angenommen haben, so ist also f positiv. Nach der zweiten Gleichung (466) ist $f.g$ negativ. Denn wir haben in § 101 gesehen, dafs $\Theta_1 - \Theta_0$ zwischen 0 und π liegt. Folglich mufs einem positiven Werthe von f ein negativer Werth von g entsprechen. In dem zweiten Medium ist x negativ, mithin stellt e^{-gnx} einen Factor dar, der um so kleiner wird, je tiefer ein Theil einer Wellenebene in das zweite Medium eingedrungen ist.

Wird die Geschwindigkeit im zweiten Medium mit $\mathfrak{C}$, der Brechungswinkel mit β bezeichnet, so ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{f} &= \frac{\mathfrak{C}}{\cos\beta}, \qquad \frac{c}{\sin\alpha} = \frac{\mathfrak{C}}{\sin\beta} \\ \text{mithin} \qquad \frac{1}{\mathfrak{C}^2} &= f^2 + \frac{\sin^2\alpha}{c^2} = \frac{1}{\mathfrak{C}_0^2}\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\cos(\Theta_1 - \Theta_0) + g^2 \end{aligned}\right\} \quad (468)$$

wo g aus den Gleichungen (467) zu berechnen ist. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{C}$ wird also von dem Einfallswinkel α abhängig sein.

§ 103. Die elliptische Polarisation an der Grenze eines absorbirenden Mediums.

Ist das einfallende Licht nach irgend einer Richtung linear polarisirt, so können wir es in zwei Componenten zerlegen, von denen die eine magnetische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene macht und die andere in der Einfallsebene. Für die erste gelten dann die Gleichungen (463) und (464), für die zweite die Gleichungen (465) und (466). Die Untersuchung der Lichtbewegung in einem stark absorbirenden Medium bietet grofse experimentelle Schwierigkeiten dar. Zur Untersuchung der Metalle stellte sich Kundt auf Glasplatten prismatische Lagen dar, die äufserst dünn waren, so dafs ein Theil des Lichtes noch hindurchgehen konnte. Es gelang zwar wohl zu zeigen, in welchem Sinne die Metalle von den durchsichtigen Körpern abweichen, aber es ist noch nicht möglich, die hier gefundenen Formeln für die Bewegung des Lichtes im Innern der Metalle zu prüfen. Viel leichter ist es dagegen, den reflectirten Strahl experimentell zu untersuchen, weshalb wir die betreffenden Formeln noch etwas näher besprechen wollen. Für beide Componenten des einfallenden Lichtes stellt sich das Verhältnifs von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ als complex heraus. Da man jede complexe Zahl in die Form $r e^{\varphi i}$ bringen kann, so können wir also schreiben:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A} . r e^{\varphi i}.$$

Die Gröfse φ zeigt in der Exponentialfunction des reflectirten Strahles eine Phasenverschiebung gegen den einfallenden Strahl an, und es geht also daraus hervor, dafs die von Metallen reflectirten Strahlen im allgemeinen eine Phasenänderung erleiden werden, sowohl wenn die magnetischen Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene sind, wie wenn sie in der Einfallsebene liegen. Aber die Phasenverschiebung ist in den beiden Fällen nicht die gleiche, weil das Verhältnifs von

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in den beiden Fällen, wie das aus den Gleichungen (464) und (466) hervorgeht, nicht das gleiche ist. Genauer untersucht sind diese Erscheinungen eigentlich nur bei durchsichtigen Substanzen, für die man auch die Werthe des Brechungsverhältnisses und des Absorptionsverhältnisses und die Dispersion genauer bestimmen kann. Man findet hier, dafs dieser Phasenunterschied zwischen den beiden Componenten des reflectirten Strahles, also die elliptische Polarisation, nur in der Nähe des Polarisationswinkels sich deutlich zeigt. Man läfst den Strahl unter dem Polarisationswinkel einfallen und seine Polarisationsebene gegen die Einfallsebene nahezu senkrecht stehen. Dann wird die eine Componente des Strahles durch die Polarisation fast ausgelöscht, während die andere Componente schon im einfallenden Licht sehr schwach ist. Durch passende Wahl dieses Winkels zwischen der Polarisationsebene des Strahles und der Einfallsebene kann man es dahin bringen, dafs die beiden Componenten im reflectirten Strahl nahehin dieselbe Amplitude haben; da sie nun aber einen Phasenunterschied erhalten, so vereinigen sie sich nicht wieder zu einem linear polarisirten Strahl, sondern sie geben dann elliptisch oder circular polarisirtes Licht.

Starke Verschiebungen der Phase werden nach unseren Formeln bei schwach absorbirenden Medien, für die also die imaginären Theile der Coefficienten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in den Gleichungen (464) und (466) klein sind, nur dann vorkommen können, wenn auch das reelle Glied von $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ nahezu gleich Null ist. Denn wenn $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = r e^{\varphi i}$ ist, so wird $\operatorname{tg} \varphi$ durch das Verhältnifs des imaginären zum reellen Theil bestimmt. Wenn also der reelle Theil grofs gegen den imaginären Theil ist, so müfste $\operatorname{tg} \varphi$ klein sein und φ daher nahezu Null oder nahezu gleich π sein. Nun ist aus unseren Formeln zu erkennen, in welchen Fällen die reellen Theile fast gleich Null werden können.

Wenn die Absorption des zweiten Mediums sehr gering ist und also g sehr nahe gleich Null ist, so gehen die Formeln (464) und (466), wenn es auch hier erlaubt ist, $\mu_1 = \mu_2$ zu setzen, in die in §§ 93 und 94 abgeleiteten Gleichungen (409) und (415) über. Denn für $g = 0$ wird nach Gleichung (467) $\Theta_1 = \Theta_0$, was nach Gleichung (451) nur für $h = 0$ möglich ist, und da $p = f + g i$, so wird für $g = 0$ nach Gleichung (468)

$$p = \frac{\cos \beta}{\mathfrak{C}}.$$

Nun haben wir in §§ 93 und 94 gesehen, dafs ein Auslöschen des reflectirten Strahles nur möglich ist, wenn die magnetischen

Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene vor sich gehen und wenn $\alpha + \beta = \pi/2$ ist. Für kleine Werthe von g stimmt nun der reelle Theil von $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ sehr nahe mit dem Werthe überein, den es für $g = 0$ annimmt. Mithin wird man nur dann kleine Werthe des reellen Theiles bekommen, wenn die magnetischen Schwingungen nahezu senkrecht zur Einfallsebene liegen und $\alpha + \beta$ nahezu gleich $\pi/2$ ist, d. h. in der Nähe des Polarisationswinkels.

Bei verschwindender Absorption ist, so lange der Einfallswinkel den Polarisationswinkel nicht übertrifft, $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ positiv, die Phasenverschiebung also Null. Uebertrifft aber der Einfallswinkel den Polarisationswinkel, so geht $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ ins Negative über und die Phasenverschiebung wird π. Für kleine Werthe von g sind die Formeln beinahe dieselben wie für $g = 0$. Die Phasenverschiebung ist klein, so lange der Einfallswinkel erheblich kleiner ist als der Polarisationswinkel, und nahezu gleich π, wenn der Einfallswinkel den Polarisationswinkel erheblich übertrifft. In der Nähe des Polarisationswinkels aber geht die Phasenverschiebung von Null nicht plötzlich zu π über, sondern durchläuft alle Zwischenwerthe. So ist es zu erklären, dafs die durchsichtigen Substanzen elliptische Polarisation nur in der Nähe des Polarisationswinkels zeigen. Die Folge davon ist, dafs das Licht an solchen Substanzen durch Reflexion unter keinem Winkel vollständig ausgelöscht werden kann, sondern in der Nähe des Polarisationswinkels nur ein Minimum in der Lichtintensität eintrittt.

Die vollständige Theorie der Metallreflexion wird noch viel experimentelle Arbeit erfordern; aber man ist durch die neueren Untersuchungen wenigstens auf den Weg gekommen, auf dem man hoffen kann, die Schwierigkeiten zu überwinden.

Bisher war es immer noch zweifelhaft, ob die Metalle ein sehr grofses Brechungsvermögen oder ein sehr kleines besitzen. Für beide Behauptungen hatten sich Unterstützungsgründe gefunden, namentlich ehe man gelernt hatte, die Aenderungen der Intensität der Schwingungen in den verschiedenen Theilen derselben Wellenebene zu berücksichtigen. Seitdem man dieses kann, ist man wenigstens auf sicherem Boden, und darf hoffen, die Aufgabe allmählich vollständig zu bezwingen.

Vierter Abschnitt.

Die Lichtbewegung in krystallinischen Medien.

§ 104. Die Bewegungsgleichungen.

Wir haben bisher nur isotrope Medien betrachtet. Es giebt aber auch nichtisotrope durchsichtige Substanzen, welche nach verschiedenen Richtungen hin in ihrem Innern verschiedene physikalische Eigenschaften zeigen. Die Reihe der Erscheinungen ist aufserordentlich mannigfach. Es sollen daher hier nur die Principien und die allgemeinen Voraussetzungen erörtert werden, welche die elektromagnetische Theorie machen mufs, um diese Erscheinungen zu erklären.

Die ältere Undulationstheorie, welche den Aether als ein festelastisches Medium ansah, machte entweder die Annahme, dafs der Aether nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene Elasticität habe, wie das ja übrigens bei krystallisirten ponderablen Körpern vielfach beobachtet werden kann und also eine Annahme ist, für welche wir sehr gute mechanische Analogien bei ponderablen elastischen Körpern haben, oder sie machte die von Fresnel herrührende Annahme, dafs die Trägheit der mitschwingenden Aethervolumina nach verschiedenen Richtungen hin eine verschiedene sei, dafs also gleichsam die Masse oder das Trägheitsmoment der ponderablen Massen, die in dem Aether eingelagert sind, für verschiedene Richtungen der Schwingung ein verschiedenes sei. Davon kann man sich keine recht klare Vorstellung machen. Sobald wir es mit zusammengesetzten Atomen zu thun haben, würde so etwas möglich sein. Sie könnten nach verschiedenen Richtungen verschiedene Rotationsmomente haben, oder man könnte annehmen, dafs gegeneinander bewegliche Theilchen vorhanden sind, die bei Verschiebung der Atome nach verschiedenen Richtungen hin etwas verschiedene Bewegungen ausführen. Aber es kommt immerhin durch diese Annahme eine gewisse Zweideutigkeit in die entsprechende Erklärung, die der ersten vom älteren Neumann in Königsberg herrührenden Annahme von verschiedener Elasticität des Aethers nach verschiedenen Richtungen hin nicht anhängt. In der elektromagnetischen Theorie entspricht diesen Hypothesen die Annahme

verschiedener Werthe der Dielektricitätsconstante und der magnetischen Constante nach verschiedenen Richtungen des Raumes hin.

Die ursprüngliche Form der MAXWELL'schen Gleichungen (30) und (31), in denen ausgedrückt wird, dafs Bewegung der Elektricität rings um sich circulare magnetische Kräfte, und Bewegung des Magnetismus rings um sich circulare elektrische Kräfte hervorruft, ist, wenn man die Componenten der elektrischen und magnetischen Kraft einführt:

$$A\mu \frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$A\varepsilon \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z}$$

wozu die entsprechenden Gleichungen für die anderen Componenten treten.

Nun ist die Möglichkeit gegeben, dafs die dielektrische und die magnetische Constante nach verschiedenen Richtungen hin verschiedene Werthe habe. Wir wollen uns hier mit dem einfachsten Fall der einaxigen Krystalle begnügen, d. h. wir wollen annehmen, dafs nach einer Richtung hin, die wir zur Richtung der x-Axe machen, die magnetische und die elektrische Constante einen anderen Werth in der Substanz habe, als in den übrigen dazu senkrechten Richtungen, so dafs wir die Gleichungen erhalten:

$$\left.\begin{aligned}
A\mu_1 \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \\
A\mu_0 \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} \\
A\mu_0 \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} \\
\text{und}\qquad A\varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \\
A\varepsilon_0 \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} \\
A\varepsilon_0 \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}
\end{aligned}\right\} \qquad (469)$$

§ 105. Ebene Wellen in einaxigen Krystallen.

Wir wollen Licht von bestimmter Schwingungszahl und ebene Wellen voraussetzen und demnach L, M, N, X, Y, Z in der Form je eines constanten Factors multiplicirt mit

$$e^{in(t+px+qy+rz)}$$

voraussetzen. Dann werden die sämmtlichen Differentialquotienten nach t, die in unseren Formeln aufgeführt werden, dadurch auszudrücken sein, dafs wir die betreffende Gröfse mit in multipliciren, und die Differentialquotienten nach x, y, z, dafs wir sie mit inp, inq, inr multipliciren. Wir bekommen dann die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A\mu_1 L &= rY - qZ \\ A\mu_0 M &= pZ - rX \\ A\mu_0 N &= qX - pY \end{aligned}\right\} \quad (470)$$

und

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon_1 X &= qN - rM \\ A\varepsilon_0 Y &= rL - pN \\ A\varepsilon_0 Z &= pM - qL \end{aligned}\right\} \quad (471)$$

Das sind sechs homogene lineare Gleichungen mit sechs Unbekannten L, M, N, X, Y, Z, deren Verhältnisse zu einander zu finden sind. Ein solches System von linearen Gleichungen kann, wenn nicht alle sechs Gröfsen Null sind, nur dann befriedigt werden, wenn die Determinante der Gleichungen gleich Null ist. Es mufs also eine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten μ_1, μ_0, ε_1, ε_0, p, q und r existiren.

Die Bedeutung von p, q, r ist aus der Function

$$e^{in(t+px+qy+rz)}$$

zu sehen. Für alle Punkte, für welche $px + qy + rz$ denselben Werth hat, hat auch die Function zu irgend einer Zeit t denselben Werth; mithin ist

$$px + qy + rz = \text{Const.}$$

die Gleichung einer Wellenebene. Bezeichnet man die Winkel, welche die Normale der Wellenebene in der Richtung des Fortschrittes der Wellen mit den Coordinatenaxen bildet, mit α, β, γ und die Lichtgeschwindigkeit mit c, so mufs also

$$e^{in(t+px+qy+rz)}$$

seinen Werth beibehalten, wenn t in $t+1$ und zugleich x in $x+c\cos\alpha$, y in $y+c\cos\beta$, z in $z+c\cos\gamma$ übergeht. Es mufs also

$$1+pc\cos\alpha+qc\cos\beta+rc\cos\gamma=0$$

sein. Da nun $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ den Coefficienten p, q, r proportional sein müssen, so folgt

$$p=-\frac{\cos\alpha}{c}, \quad q=-\frac{\cos\beta}{c}, \quad r=-\frac{\cos\gamma}{c}.$$

Die Bedingungsgleichung zwischen μ_1, μ_0, ε_1, ε_0, p, q und r kann also gedeutet werden als eine Gleichung, nach welcher bei einem gegebenen Krystall die Geschwindigkeit des Lichtes von der Richtung der Wellennormale abhängt. Wir werden sie weiter unten in einer übersichtlichen Form darstellen.

Multipliciren wir die drei Gleichungen (470) mit p, q, r und addiren sie, so bekommen wir

$$A\mu_1 pL+A\mu_0 qM+A\mu_0 rN=0,$$

und wenn wir die drei Gleichungen (471) ebenso behandeln:

$$A\varepsilon_1 pX+A\varepsilon_0 qY+A\varepsilon_0 rZ=0.$$

Wenn wir statt der magnetischen und elektrischen Kräfte die Momente einführen, so ist statt $\mu_1 L$, $\mu_0 M$, $\mu_0 N$ zu setzen $4\pi\mathfrak{L}$, $4\pi\mathfrak{M}$, $4\pi\mathfrak{N}$, und statt $\varepsilon_1 X$, $\varepsilon_0 Y$, $\varepsilon_0 Z$ tritt ein $4\pi\mathfrak{X}$, $4\pi\mathfrak{Y}$, $4\pi\mathfrak{Z}$. Heben wir den Factor $4\pi A$ weg, so können wir schreiben:

$$p\mathfrak{L}+q\mathfrak{M}+r\mathfrak{N}=0$$

und

$$p\mathfrak{X}+q\mathfrak{Y}+r\mathfrak{Z}=0.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichungen ist, dafs das magnetische und das elektrische Moment auf der Normale der Wellenebene senkrecht stehen, also in die Wellenebene selbst fallen.

Multipliciren wir andererseits die drei Gleichungen (470) mit X, Y, Z und addiren sie, so erhalten wir

$$A\mu_1 LX+A\mu_0 MY+A\mu_0 NZ=0,$$

und wenn wir die drei Gleichungung (471) mit L, M, N multipliciren:

$$A\varepsilon_1 LX+A\varepsilon_0 MY+A\varepsilon_0 NZ=0.$$

Der Factor A kann aus beiden Gleichungen weggehoben werden, und man kann in den so entstehenden Gleichungen

$$\mu_1 L X + \mu_0 (M Y + N Z) = 0$$
$$\varepsilon_1 L X + \varepsilon_0 (M Y + N Z) = 0$$

die Ausdrücke $L X$ und $M Y + N Z$ als die Unbekannten auffassen.

Aus diesen beiden Gleichungen folgt, dafs, wenn die Determinante der Coefficienten $\mu_1 \varepsilon_0 - \mu_0 \varepsilon_1$ von Null verschieden ist, was wir zunächst voraussetzen wollen, die beiden Unbekannten $L X$ und $M Y + N Z$ verschwinden müssen.

Statt dessen können wir auch sagen, indem wir $L X$ mit $\mu_1 \varepsilon_1$ und $M Y + N Z$ mit $\mu_0 \varepsilon_0$ multipliciren, dafs

$$\mathfrak{L} \mathfrak{X} = 0$$

und

$$\mathfrak{M} \mathfrak{Y} + \mathfrak{N} \mathfrak{Z} = 0$$

sein müssen, oder was auf dasselbe hinauskommt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{L} \mathfrak{X} &= 0 \\ \mathfrak{L} \mathfrak{X} + \mathfrak{M} \mathfrak{Y} + \mathfrak{N} \mathfrak{Z} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (472)$$

Die zweite dieser Gleichungen besagt, dafs das magnetische und das elektrische Moment senkrecht auf einander stehen, und die erste Gleichung, dafs entweder das magnetische oder das elektrische Moment auf der x-Axe senkrecht ist.

Denkt man sich irgend einen Punkt einer Wellenebene, zieht durch ihn eine Parallele zur x-Axe und legt eine Ebene durch diese Parallele und die Normale der Wellenebene, so mufs also entweder die magnetische oder die elektrische Schwingung auf dieser Ebene senkrecht stehen. Denn beide sind ja senkrecht zur Wellennormale und eine von ihnen ist senkrecht zur x-Axe. Eine solche Ebene heifst ein Hauptschnitt des Krystalles.

Wir haben also zwei Möglichkeiten. Entweder ist die magnetische Schwingung senkrecht zum Hauptschnitt; dann mufs die elektrische Schwingung in der Schnittlinie der Wellenebene und des Hauptschnittes liegen. Oder die elektrische Schwingung ist senkrecht zum Hauptschnitt; dann mufs die magnetische Schwingung in dem Hauptschnitt und in der Wellenebene liegen.

Im ersten Fall haben wir

$$L = 0 \quad \text{und} \quad \frac{M}{r} = - \frac{N}{q}.$$

Aus den drei Gleichungen (471) folgt alsdann:

$$\left.\begin{aligned} A\,\varepsilon_1\,X &= -(q^2+r^2)\frac{M}{r} \\ A\,\varepsilon_0\,Y &= \quad p\,q\,\frac{M}{r} \\ A\,\varepsilon_0\,Z &= \quad p\,r\,\frac{M}{r} \end{aligned}\right\} \tag{473}$$

Setzen wir diese Werthe in die drei Gleichungen (470) ein, so ist die erste identisch erfüllt, während die anderen beiden die Relation ergeben:

$$A\,\mu_0 = \frac{p^2}{A\,\varepsilon_0} + \frac{q^2+r^2}{A\,\varepsilon_1} \tag{474}$$

oder, wenn wir

$$p = -\frac{\cos\alpha}{c}$$

und

$$q^2+r^2 = \frac{\sin^2\alpha}{c^2}$$

einsetzen und beide Seiten mit A multipliciren:

$$A^2\,\mu_0 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_0} + \frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_1}\right). \tag{474a}$$

Ganz analog hat man im zweiten Fall zu setzen:

$$X = 0 \quad \text{und} \quad \frac{Y}{r} = -\frac{Z}{q}.$$

Dann erhält man aus den drei Gleichungen (470):

$$\left.\begin{aligned} A\,\mu_1\,L &= (r^2+q^2)\frac{Y}{r} \\ A\,\mu_0\,M &= \quad -p\,q\,\frac{Y}{r} \\ A\,\mu_0\,N &= \quad -p\,r\,\frac{Y}{r} \end{aligned}\right\} \tag{475}$$

Diese Ausdrücke in die drei Gleichungen (471) eingesetzt, ergeben die Relation:

$$A\,\varepsilon_0 = \frac{r^2+q^2}{A\,\mu_1} + \frac{p^2}{A\,\mu_0} \tag{476}$$

oder

$$A^2\,\varepsilon_0 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\cos^2\alpha}{\mu_0} + \frac{\sin^2\alpha}{\mu_1}\right). \tag{476a}$$

Die Geschwindigkeit hängt also in beiden Fällen von dem Winkel ab, den die Wellennormale mit der x-Axe bildet, es sei denn, dafs ε_0 und ε_1 oder μ_0 und μ_1 einander gleich sind. Für $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$ würde im ersten Falle

$$A^2 \mu_0 = \frac{1}{c^2 \varepsilon_0}$$

und im zweiten Falle würde für $\mu_0 = \mu_1$

$$A^2 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2 \mu_0}$$

sein, d. h. wir würden auf die Formel zurückfallen, die in einem isotropen Medium die Lichtgeschwindigkeit bestimmt.

Bei den durchsichtigen krystallinischen Substanzen, auf welche wir diese Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit allein beziehen können, weil bei absorbirenden Substanzen die Sachen wesentlich verändert werden, sind die magnetischen Constanten aufserordentlich wenig von einander unterschieden. Hier wird also die Lichtgeschwindigkeit für den Fall, dafs die magnetischen Schwingungen im Hauptschnitt liegen (Gleichung 476 a), nahezu von der Richtung des Strahles unabhängig und gleich $\frac{1}{A\sqrt{\varepsilon_0 \mu}}$. Wenn aber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach allen Richtungen hin die gleiche ist, so breitet sich die Lichtbewegung von einem Punkt in Kugelflächen aus, und daraus folgt, dafs die Brechung solcher Lichtstrahlen an der Grenze krystallinischer Medien nach denselben Gesetzen wie in isotropen Medien vor sich geht. Sind dagegen die magnetischen Schwingungen senkrecht zum Hauptschnitt, so breitet sich das Licht von einem Punkte in Rotationsflächen aus, die man erhält, wenn man nach allen möglichen Richtungen hin Stücke abträgt, die den entsprechenden Werthen von c proportional sind, wo c aus der Gleichung

$$A^2 \mu_0 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\cos^2 \alpha}{\varepsilon_0} + \frac{\sin^2 \alpha}{\varepsilon_1}\right)$$

zu berechnen ist. Daher sind hier die Brechungsgesetze andere als in isotropen Medien, und mithin wird ein Lichtstrahl, der auf ein krystallinisches Medium auffällt, da wir ihn uns ja aus zwei senkrecht zu einander polarisirten Strahlen zusammengesetzt denken können, im Allgemeinen durch die Brechung in zwei Strahlen gespalten, von denen der eine der ordinäre, der andere der extraordinäre genannt wird. Im ordinären Strahl liegen die magnetischen

Schwingungen im Hauptschnitt und seine Brechung geschieht nach den Gesetzen isotroper Medien. Im extraordinären Strahl dagegen sind die magnetischen Schwingungen senkrecht zum Hauptschnitt und seine Brechung geht nach verwickelteren Gesetzen vor sich.

Da die magnetischen Schwingungen beim ordinären Strahl im Hauptschnitt liegen, so entspricht also bei einem durch Reflexion polarisirten Strahl die Einfallsebene dem Hauptschnitt; denn, wie wir oben gesehen haben, wird unter dem Polarisationswinkel das Licht nicht reflectirt, dessen magnetische Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene liegen.

Wir haben oben den Fall ausgeschlossen, dafs die Determinante $\varepsilon_0 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_0$ gleich Null wäre. Wir können ihn nun angliedern, indem wir ihn als Grenzfall betrachten. Denken wir uns die Constanten $\mu_0, \mu_1, \varepsilon_0, \varepsilon_1$ in solche Werthe übergehend, wo $\frac{\mu_0}{\mu_1} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}$, so geht der Krystall in einen solchen über, bei dem die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des ordinären und extraordinären Strahles für dieselbe Richtung die gleichen sind. Denn die beiden Gleichungen für c (474a) und (476a) lassen sich schreiben:

$$A^2 \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \left(\cos^2 \alpha + \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1} \sin^2 \alpha \right)$$

$$A^2 \mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} \left(\cos^2 \alpha + \frac{\mu_0}{\mu_1} \sin^2 \alpha \right),$$

unterscheiden sich also nicht mehr, wenn

$$\frac{\mu_0}{\mu_1} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}.$$

Die Strahlen könnten dann nicht in zwei verschieden polarisirte Bestandtheile zerfallen; es würde also keine Doppelbrechung existiren. Aber ein solches Medium würde die Eigenschaft haben können, dafs die Geschwindigkeit des Durchganges nach einer bestimmten Axenrichtung eine andere wäre, als nach den anderen. Das ist nun bisher noch nicht beobachtet worden.

In allen bekannten einaxigen krystallinischen Medien sind die beiden magnetischen Constanten μ_0 und μ_1 nicht wesentlich von einander verschieden, $\frac{\mu_0}{\mu_1}$ also gleich 1, während $\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_1}$ von 1 verschieden ist.

Nimmt man nun in den drei verschiedenen Coordinatenrichtungen je drei verschiedene Werthe der elektrischen und magnetischen Constanten an, so erhält man den Fall der sogenannten zweiaxigen Krystalle.

Nachdem aber die Principien klar gelegt sind, reducirt sich die ganze weitere Durchführung, auf die wir hier nicht weiter eingehen wollen, auf trigonometrische einfache Rechnungen, welche nur dadurch, dafs sie unter sehr mannigfaltigen Einzelbedingungen angewendet werden müssen, nun ein so buntes Resultat geben, wie es durch die Erscheinungen der Doppelbrechung dargestellt ist.

Fünfter Abschnitt.

Die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde.

§ 106. Die Differentialgleichungen der Lichtbewegung im magnetischen Felde.

Die Rotation der Polarisationsebene unter dem Einflufs des Magnetismus kann man durch die in den Gleichungen (434), (435) und (436) dargestellte erweiterte Form der MAXWELL'schen Gleichungen erklären, bei welcher das Medium selbst als bewegt betrachtet ist.

Wir nehmen ein starkes magnetisches Feld an, dessen Kraftlinien die Richtung der x-Axe haben, setzen also voraus, dafs L einen grofsen Werth habe. Werden nun durch Bewegung ponderabler Körper Bewegungen des Aethers erregt, so wird im Allgemeinen die Geschwindigkeit verschwindend klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sein, mit der sich die Spannungen im Aether ausgleichen. Wenn es sich dagegen um Schwingungen der ponderablen Atome handelt, welche unter dem Einflufs der Lichtbewegung zu Stande kommen, so werden das verhältnifsmäfsig schnelle Schwingungen sein. Diese setzen dann auch, wie wir annehmen, die Theile des Aethers, welche die schwingenden ponderablen Atome umgeben, in rasche Bewegung.

Gesetzt, es ziehen Lichtwellen in der Richtung der x-Axe, und ponderable Atome werden dadurch zu Schwingungen senkrecht zur x-Axe veranlafst, so werden wir $\alpha = 0$, β und γ von Null verschieden vorauszusetzen haben. Denn der ROWLAND'sche Versuch über die

Ablenkung der Magnetnadel, welche dadurch entsteht, dafs mit Elektricität stark beladene in entgegengesetzter Richtung rotirende Condensatorscheiben magnetische Kräfte in der Umgebung hervorbringen, zeigt, dafs die Bewegung der Aetherschicht, die dem bewegten ponderablen Körper direct anliegt, seiner Bewegung folgen mufs.

Nehmen wir zunächst auch $\gamma = 0$ an, so dafs die Bewegung in Richtung der y-Axe vor sich geht. Dann kommen, was die Bewegung betrifft, nur diejenigen Glieder in Betracht, die zugleich $\mathfrak{L}$ und β enthalten, während im Uebrigen die Gleichungen dieselben bleiben, die ohne die Bewegung des Aethers gelten. Danach sind also von den Gleichungen (434) und (436) nur die folgenden beiden durch die Aetherbewegung wesentlich geändert:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 4\pi A \left[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{L}\beta)\right]$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 4\pi A \left[\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{L}\beta)\right]$$

oder, wie wir auch schreiben können:

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y}(Z + 4\pi A \mathfrak{L}\beta) = 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(Z + 4\pi A \mathfrak{L}\beta) - \frac{\partial X}{\partial z} = 4\pi A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t}.$$

Die Wirkung der Aetherbewegung β können wir also beschreiben, indem wir sagen, dafs eine elektrische Kraft $4\pi A \mathfrak{L}\beta$ in der Richtung der z-Axe hervorgerufen wird. Nehmen wir nun das Atom geladen mit positiver Elektricität an, so wird eine ponderomotorische Kraft entstehen, welche seine der y-Axe parallel angenommene Bewegung in der Art ändert, dafs eine z-Componente der Bewegung hinzutritt. Dieses hat auch eine Aenderung der Aetherbewegung zur Folge, die wieder eine zur Bewegung und zur x-Axe senkrechte ponderomotorische Kraft hervorruft. Indem nun die Bewegung der Atome wieder auf die elektrischen und magnetischen Momente des Aethers zurückwirkt, entsteht eine Rotation der Polarisationsebene.

Um dieses analytisch auszudrücken, müssen wir beachten, dafs wir es hier nur mit verschwindend kleinen translatorischen Bewegungen der Ionen und verschwindend kleinen Aenderungen der elektrischen Momente zu thun haben. Unter diesen Umständen

dürfen wir die hervorgerufenen Aenderungen einfach den mitwirkenden Factoren proportional setzen. Die Atome denken wir uns paarweise mit entgegengesetzten elektrischen Ladungen, wie wir sie auch für die Ableitung der Dispersion angenommen haben. Durch die Aetherbewegung wird dann das elektrische Moment des Ionenpaares geändert. Die Beziehungen zwischen den elektrischen und magnetischen Momenten des Aethers und den elektrischen Momenten der Ionenpaare sind dann durch dieselben Gleichungen wie früher auszudrücken. Nur tritt durch die Bewegung des Aethers, wie wir gesehen haben, eine elektrische und eine ponderomotorische Kraft hinzu. Ist die Bewegung der Ionen senkrecht zur x-Axe, so haben wir $\mathfrak{x} = 0$ zu setzen. Da die elektrische und die ponderomotorische Kraft senkrecht zur Bewegung der Ionen und in der yz-Ebene liegen, so sind ihre Componenten proportional

$$-\frac{\partial \mathfrak{z}}{d t}\mathfrak{L}, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{d t}\mathfrak{L}$$

zu setzen. Die Lichtwellen denken wir uns senkrecht zur x-Axe und nehmen danach an, dafs alle Gröfsen von y und z unabhängig sind. $\mathfrak{X}$ ist gleich Null und $\mathfrak{L}$ ist constant und grofs vorausgesetzt.

Die früheren Gleichungen (443), (444) und (445a):

$$A\varepsilon\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y}) - \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{z})$$

$$A\mu\frac{\partial(\mathfrak{X} + \mathfrak{x})}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(\mathfrak{N}) - \frac{\partial}{\partial z}(\mathfrak{M})$$

$$\mathfrak{X} = a^2\mathfrak{x} + m\frac{\partial^2 \mathfrak{x}}{\partial t^2} + k\mathfrak{x}$$

und die analogen sechs anderen sind also in folgender Weise zu modificiren. Es bleiben nur die Differentialquotienten nach t und nach x stehen. An die Stelle von $\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Z} - \mathfrak{z})$ tritt $\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{Z} - \mathfrak{z} + q\mathfrak{L}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}\right)$ und an die Stelle von $\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y})$ tritt $\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{Y} - \mathfrak{y} - q\mathfrak{L}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}\right)$. Die Reibung der Ionen soll der Einfachheit wegen weggelassen werden. Statt der Glieder $k\mathfrak{y}$ und $k\mathfrak{z}$ treten die den Componenten der ponderomotorischen Kraft entsprechenden Glieder ein, die wir gleich $+k\mathfrak{L}\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial t}$ und $-k\mathfrak{L}\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial t}$ setzen. Die Gröfsen q und k werden als constant vorausgesetzt.

So ergeben sich die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon\frac{\partial\mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}+q.\mathfrak{L}.\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\right)\\ A\varepsilon\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}-q.\mathfrak{L}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(477)$$

$$\left.\begin{aligned} A\mu\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}) &= -\frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{N})\\ A\mu\frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathfrak{M})\end{aligned}\right\}\qquad(478)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Y} &= a^2\mathfrak{y}+m\frac{\partial^2\mathfrak{y}}{\partial t^2}+k\mathfrak{L}\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial t}\\ \mathfrak{Z} &= a^2\mathfrak{z}+m\frac{\partial^2\mathfrak{z}}{\partial t^2}-k\mathfrak{L}\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\qquad(479)$$

Wir nehmen nun an, jede Function soll von t und x nur durch den Factor $e^{in(t+px)}$ abhängen. Dadurch reduciren sich nun die Gleichungen auf:

$$\left.\begin{aligned} A\varepsilon\mathfrak{M} &= p(\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}+q\mathfrak{L}in\mathfrak{y})\\ A\varepsilon\mathfrak{N} &= -p(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}-q\mathfrak{L}in\mathfrak{z})\end{aligned}\right\}\qquad(480)$$

$$\left.\begin{aligned} A\mu(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}) &= -p\mathfrak{N}\\ A\mu(\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}) &= p\mathfrak{M}\end{aligned}\right\}\qquad(481)$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Y} &= (a^2-mn^2)\mathfrak{y}+k\mathfrak{L}in\mathfrak{z}\\ \mathfrak{Z} &= (a^2-mn^2)\mathfrak{z}-k\mathfrak{L}in\mathfrak{y}\end{aligned}\right\}\qquad(482)$$

§ 107. Die Formeln für die Drehung der Polarisationsebene.

Durch Elimination von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ergeben sich die Gleichungen:

$$A^2\mu\varepsilon(\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}) = p^2(\mathfrak{Y}-\mathfrak{y}-q\mathfrak{L}in\mathfrak{z})$$
$$A^2\mu\varepsilon(\mathfrak{Z}+\mathfrak{z}) = p^2(\mathfrak{Z}-\mathfrak{z}+q\mathfrak{L}in\mathfrak{y})$$

Eliminirt man auch $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ mit Hülfe der Gleichungen (482), so erhält man für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} &A^2\mu\varepsilon\big((a^2-mn^2+1)\mathfrak{y}+k\mathfrak{L}in\mathfrak{z}\big)\\ &= p^2\big((a^2-mn^2-1)\mathfrak{y}+(k-q)\mathfrak{L}in\mathfrak{z}\big)\\ &A^2\mu\varepsilon\big((a^2-mn^2+1)\mathfrak{z}-k\mathfrak{L}in\mathfrak{y}\big)\\ &= p^2\big((a^2-mn^2-1)\mathfrak{z}-(k-q)\mathfrak{L}in\mathfrak{y}\big).\end{aligned}$$

Die erste Gleichung ergiebt:

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}} = \frac{(p^2 - A^2\mu\varepsilon)\,k\,\mathfrak{L}\,i\,n - p^2 q\,\mathfrak{L}\,i\,n}{(A^2\mu\varepsilon + p^2) + (A^2\mu\varepsilon - p^2)\,(a^2 - m\,n^2)}\,,$$

die zweite Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{z}} = -\frac{(A^2\mu\varepsilon + p^2) + (A^2\mu\varepsilon - p^2)\,(a^2 - m\,n^2)}{(p^2 - A^2\mu\varepsilon)\,k\,\mathfrak{L}\,i\,n - p^2 q\,\mathfrak{L}\,i\,n}\,. \qquad (483)$$

Die beiden Werthe müssen also einander gleich sein, wenn es möglich sein soll, die Gleichungen zu befriedigen:

$$\frac{(p^2 - A^2\mu\varepsilon)\,k\,\mathfrak{L}\,i\,n - p^2 q\,\mathfrak{L}\,i\,n}{(A^2\mu\varepsilon + p^2) + (A^2\mu\varepsilon - p^2)(a^2 - m\,n^2)} = - \frac{(A^2\mu\varepsilon + p^2) + (A^2\mu\varepsilon - p^2)\,(a^2 - m\,n^2)}{(p^2 - A^2\mu\varepsilon)\,k\,\mathfrak{L}\,i\,n - p^2 q\,\mathfrak{L}\,i\,n}$$

oder

$$\left[\frac{(p^2 - A^2\mu\varepsilon)\,k\,\mathfrak{L}\,i\,n - p^2 q\,\mathfrak{L}\,i\,n}{(A^2\mu\varepsilon + p^2) + (A^2\mu\varepsilon - p^2)\,(a^2 - m\,n^2)}\right]^2 = -1\,.$$

Das giebt zwei Möglichkeiten:

$$\frac{(p^2 - A^2\mu\varepsilon)\,k\,\mathfrak{L}\,n - p^2 q\,\mathfrak{L}\,n}{(A^2\mu\varepsilon + p^2) + (A^2\mu\varepsilon - p^2)\,(a^2 - m\,n^2)} = \pm 1\,.$$

Jedem der beiden Fälle entspricht ein bestimmter reeller Werth von p^2. Für das obere Zeichen ist:

$$p^2\,(a^2 - m\,n^2 - 1 - q\,\mathfrak{L}\,n + k\,\mathfrak{L}\,n) = A^2\mu\varepsilon\,(a^2 - m\,n^2 + 1 + k\,\mathfrak{L}\,n) \qquad (484)$$

und für das untere Zeichen ist:

$$p^2\,(a^2 - m\,n^2 - 1 + q\,\mathfrak{L}\,n - k\,\mathfrak{L}\,n) = A^2\mu\varepsilon\,(a^2 - m\,n^2 + 1 - k\,\mathfrak{L}\,n)\,. \qquad (484\text{a})$$

Im ersten Fall ist nach den Gleichungen (483):

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{z}\,i,$$

im zweiten Fall:

$$\mathfrak{y} = -\mathfrak{z}\,i.$$

Aus den Gleichungen (482) folgt dann im ersten Fall:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Y} &= (a^2 - m\,n^2 + k\,\mathfrak{L}\,n)\,\mathfrak{y} \\ \mathfrak{Z} &= (a^2 - m\,n^2 + k\,\mathfrak{L}\,n)\,\mathfrak{z} \end{aligned}\right\} \qquad (485)$$

und mithin

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}\,i\,. \qquad (486)$$

Im zweiten Fall folgt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Y} &= (a^2 - m\,n^2 - k\,\mathfrak{L}\,n)\,\mathfrak{y} \\ \mathfrak{Z} &= (a^2 - m\,n^2 - k\,\mathfrak{L}\,n)\,\mathfrak{z} \end{aligned}\right\} \qquad (485\text{a})$$

und mithin

$$\mathfrak{Y} = -\mathfrak{Z} i. \tag{486a}$$

Aus den Gleichungen (481) für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ endlich ergiebt sich im ersten Fall:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{A\mu}{p}(a^2 - m n^2 + 1 + k \mathfrak{L} n) \mathfrak{z} \\ \mathfrak{N} &= -\frac{A\mu}{p}(a^2 - m n^2 + 1 + k \mathfrak{L} n) \mathfrak{y}, \end{aligned}\right\} \tag{487}$$

mithin

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N} i, \tag{488}$$

und im zweiten Fall:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{A\mu}{p}(a^2 - m n^2 + 1 - k \mathfrak{L} n) \mathfrak{z} \\ \mathfrak{N} &= -\frac{A\mu}{p}(a^2 - m n^2 + 1 - k \mathfrak{L} n) \mathfrak{y}, \end{aligned}\right\} \tag{487a}$$

mithin

$$\mathfrak{M} = -\mathfrak{N} i. \tag{488a}$$

Die beiden Fälle entsprechen Circularpolarisationen. Denn der Factor $\pm i$ drückt eine Phasendifferenz aus, die dem vierten Theil einer Schwingung entspricht. Ist z. B. im ersten Falle

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{B} e^{i n (t + p x)}$$

$\mathfrak{B}$ als reell vorausgesetzt, so ist

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{B} e^{i n (t + p x) - \frac{\pi}{2} i}.$$

Die reellen Theile von $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ sind dann

$$\mathfrak{B} \cos n (t + p x) \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} \sin n (t + p x).$$

Der Vector, der in jedem Augenblick das elektrische Moment darstellt, bleibt also immer von gleicher Länge und dreht sich in dem Sinne von der y-Axe zur z-Axe.

Dasselbe gilt von dem magnetischen Vector, und der Drehungssinn bleibt im Raume der gleiche sowohl für einen positiven, wie für einen negativen Werth von p, gleichgültig also ob die Lichtwellen der Richtung der x-Axe entgegengesetzt oder in der Richtung der x-Axe ziehen. In Beziehung auf die Fortpflanzungsrichtung der Lichtwellen ist also der Drehungssinn der entgegengesetzte: linksdrehend wenn die Wellen der x-Richtung entgegenziehen und rechtsdrehend, wenn sie in der Richtung der x-Axe ziehen.

Der zweite Fall stellt die entgegengesetzt drehende Circularpolarisation dar. Für

$$\mathfrak{Y} = \mathfrak{B} e^{in(t+px)}$$

wird hier

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{B} e^{in(t+px) + i\frac{\pi}{2}}$$

und die reellen Theile sind mithin

$$\mathfrak{B} \cos n(t+px) \qquad \text{und} \qquad -\mathfrak{B} \sin n(t+px).$$

Der elektrische Vector dreht sich also in dem Sinne von der z-Axe zur y-Axe. Den beiden Schwingungsarten entsprechen verschiedene Werthe von p. Sie schreiten also mit verschiedenen Geschwindigkeiten fort. Auch in einem Medium, das keine Ionenpaare enthält, kann man jedes geradlinig polarisirte Licht sich zusammengesetzt denken aus zwei entgegengesetzt drehenden circular polarisirten Schwingungsarten. Nur haben beide die gleiche Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Daher bleibt die geradlinige Schwingung, die sich aus ihnen zusammensetzt, immer in derselben Ebene. Hier dagegen, wo die beiden Geschwindigkeiten verschieden sind, können sie zwar auch in jedem Punkte zu einer geradlinigen Schwingung zusammengesetzt werden, aber die Richtung der geradlinigen Schwingung ändert sich längs des Strahles. Wenn der rechtsdrehende Vector einer gröfseren Geschwindigkeit, also einer gröfseren Wellenlänge entspricht, so wird seine Drehung längs des Strahles langsamer sein und mithin wird der aus beiden Vectoren zusammengesetzte Vector sich links um den Strahl drehen und umgekehrt. Tritt also das Licht aus dem mit Ionenpaaren durchsetzten Medium aus, so wird es wieder geradlinig polarisirt sein; aber die Polarisationsebene wird eine Drehung erfahren haben; und diese Drehung wird nicht aufgehoben, wenn der Strahl durch Reflexion veranlafst wird, denselben Weg zurückzulaufen, sondern verdoppelt.

Der Vorgang ist deshalb von Wichtigkeit, weil er WILLIAM THOMSON zu dem Schlusse veranlafste, dafs eine Drehung der Träger der elektrischen und magnetischen Kräfte vorkommen müfste. Nur durch eine Drehung glaubte er erklären zu können, dafs die Drehung der Polarisationsebene im magnetischen Felde, wenn man den Strahl reflectirt, nicht wieder zurückgeht, sondern in demselben Sinne sich vergröfsert. Durch die Ableitung sehen wir nun, dafs die MAXWELL-schen Gleichungen diese Drehung ergeben, ohne dafs man eine drehende Bewegung des Trägers der elektrischen und magnetischen

Momente noch hinzunimmt. Der Grund der Drehung steckt in der eigenthümlichen Art der Asymmetrie der MAXWELL'schen Gleichungen, wonach wir einmal

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} \text{ etc.,}$$

das andere Mal aber

$$\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} \text{ etc.}$$

haben.









